

ACHATAMENTO POLAR DE UM PLANETA

Wilson Lopes

Faculdades "Farias Brito" - Guarulhos

Considere um planeta de massa M , girando em torno de seu eixo de rotação, com velocidade angular ω . Devido ao seu movimento de rotação, o planeta apresenta um achatamento polar; de tal maneira que o raio equatorial, R_e é maior que o raio polar, R_p . Define-se o achatamento do planeta pela relação:

$$e = (R_e - R_p)/R_e = 1 - \frac{R_p}{R_e} \quad (1)$$

Muitos cientistas tem tratado a respeito do achatamento da Terra e de outros planetas. Um dos primeiros a se preocupar com este fenômeno foi Isaac Newton, em 1687. O eminente cientista considerou duas colunas líquidas em equilíbrio hidrostático, estendidas, do polo até o centro da Terra e do centro da Terra até o equador. O movimento de rotação da Terra, em torno de seu eixo, faz com que a coluna líquida equatorial seja maior que a coluna polar. Com estas considerações pode concluir que o achatamento da Terra era $1/230^{(1)}$ (ver Fig. 1).

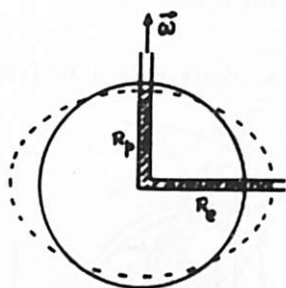


Fig. 1 - Devido ao movimento de rotação a coluna equatorial se apresenta distendida, enquanto que, a coluna polar se apresenta contraída.

Admitindo-se que a forma equipotencial da superfície terrestre, ou de qualquer outro planeta, é uma consequência da força de atração gravitacional e da força centrípeta, pode-se conseguir bons resultados teóricos para o raio equatorial, conhecendo-se o raio polar do planeta (2).

Neste trabalho, pretende-se, igualmente, calcular o achatamento da Terra e de outros planetas, levando-se em conta que o planeta apresenta densidade constante e, sua massa líquida, obedeça leis de equilíbrio hidrostático.

Os pontos A e C pertencem à superfície do planeta que é considerada isobárica, cuja pressão é p_{atm} (Fig. 2). A força resultante sobre a massa $dm = \mu \cdot R_p \cdot d\lambda \cdot dA$, é a força de gravitação universal, dada por

$$\begin{aligned} dF_G &= 4\pi G \cdot \mu \cdot R_p \cdot dm/3 = \\ &= 4\pi G \cdot \mu^2 \cdot R_p^2 \cdot d\lambda \cdot dA/3 \end{aligned} \quad (2)$$

onde μ é a densidade do planeta. A força dF_G é resultante entre as forças dP , que representa o peso, e dF_C , que representa a força centrípeta, cujo valor é dado por:

$$dF_C = w^2 \cdot R_p \cdot \cos \lambda \cdot dm \quad (3)$$

Nas expressões (2) e (3), λ representa a latitude da massa dm .

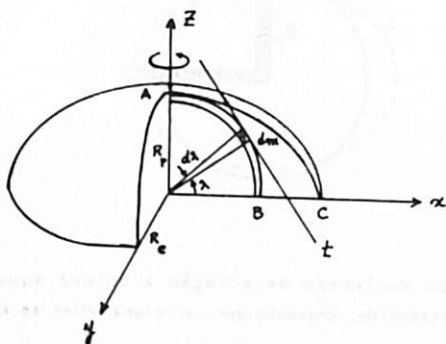


Fig. 2 - A figura mostra um planeta, exageradamente, achatado devido ao seu movimento de rotação. A coluna líquida AB tem raio R_p e a coluna líquida BC é retilínea e de comprimento $R_e - R_p$.

A força dF_c é pequena quando comparada com dF_G e dP . Como consequência para a força peso resulta uma equação aproximada:

$$dP \approx dF_G \cdot (1 - dF_c \cdot \cos \lambda / dF_G) \quad (4)$$

Substituindo-se as equações (2) e (3) em (4), teremos:

$$dP \approx \frac{4\pi}{3} \cdot G \cdot \mu^2 \cdot R_p^2 \cdot d\lambda \cdot dA \cdot (1 - 3w^2 \cdot \cos^2 \lambda / 4\pi G \cdot \mu) \quad (5)$$

A equação de equilíbrio hidrostático, ao longo da coluna líquida AB, deverá ser obtida pela projeção da força peso, dP , sobre a reta t (ver Fig. 3), isto é:

$$dP_t = dP \cdot \text{sen } B \quad (6)$$

onde B é o ângulo formado entre a força peso e a força gravitacional. Pode-se ver pela Fig. 3, que

$$\begin{aligned} \text{sen } B &= dF_c \cdot \text{sen } \lambda / dP = \\ &\approx 3w^2 \cdot \text{sen } \lambda \cdot \cos \lambda / \left[4\pi \cdot G \cdot \mu \cdot (1 - 3w^2 \cos^2 \lambda / 4\pi G \cdot \mu) \right] \quad (7) \end{aligned}$$

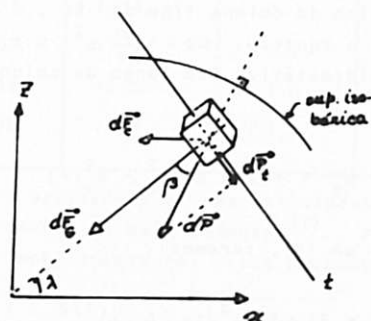


Fig. 3 - A Fig. 3 mostra as forças que estão agindo sobre a massa dm . A força de gravitação, dF_G , é perpendicular à reta t , tangente à coluna AB, e a força peso, dP , é perpendicular à superfície isobárica AC.

Substituindo-se as expressões (5) e (7) em (6), teremos:

$$dp_t = \mu \cdot R_p^2 \cdot \omega^2 \cdot \text{sen } \lambda \cdot \text{cos } \lambda \cdot d\lambda \cdot dA \quad (7)$$

A equação barométrica, ao longo da coluna líquida AB, pode ser obtida, integrando-se a equação

$$dp = -\mu \cdot R_p^2 \omega^2 \text{sen } \lambda \cdot \text{cos } \lambda \cdot d\lambda \quad ,$$

isto é,

$$\int_{p=p_B}^{p_{atm}} dp = -\mu \cdot \omega^2 R_p^2 \int_{\lambda=0}^{\pi/2} \text{sen } \lambda \cdot \text{cos } \lambda \cdot d\lambda \quad ,$$

portanto:

$$p_B = p_{atm} + (1/2) \cdot \mu \cdot R_p^2 \cdot \omega^2 \quad (8)$$

A equação (8) representa o equilíbrio hidrostático ao longo da coluna líquida AB, de raio R_p , que se estende do polo até o equador do planeta.

Ao longo do plano equatorial, a força considerada para o equilíbrio hidrostático da coluna líquida BC, é a força de gravitação. Integrando-se a equação, $dp = -\frac{4\pi}{3} \mu^2 \cdot G \cdot r \cdot dr$, teremos a equação de equilíbrio hidrostático, ao longo da coluna líquida BC, isto é:

$$p_{atm} - p_B = -2\pi \mu^2 G (R_e^2 - R_p^2)/3 \quad (9)$$

Substituindo-se (8) em (9), teremos:

$$R_e/R_p = (1 + 3 \cdot \omega^2 / 2\pi \cdot G \cdot \mu)^{1/2} \quad (10)$$

A expressão (10) mostra que a razão entre o raio polar e o raio equatorial de um planeta, depende de sua velocidade angular e de sua densidade. Tendo em vista a equação (1), poderemos definir o achatamento de um planeta pela equação:

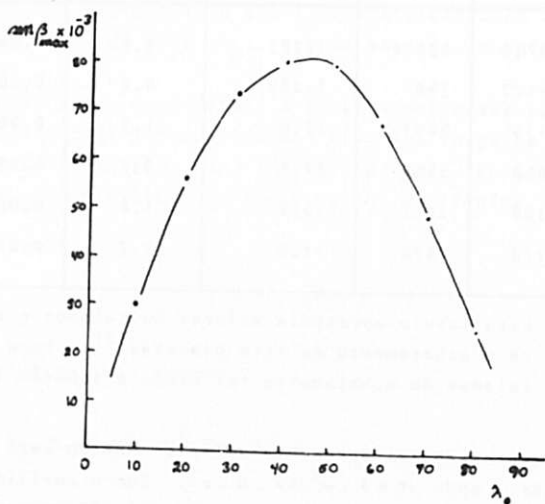
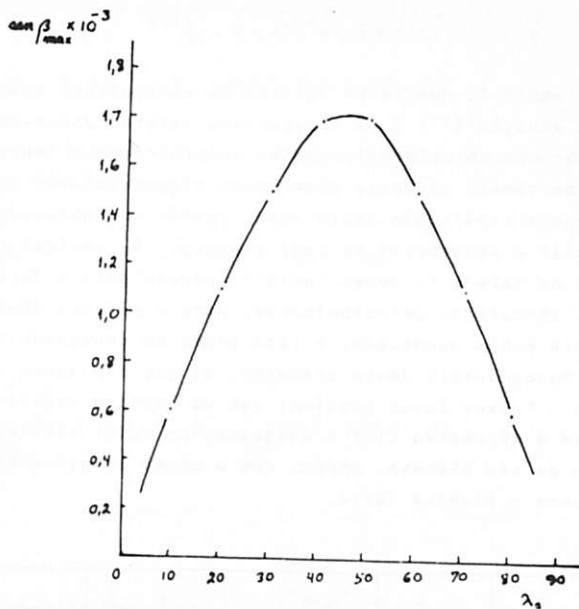
$$e = 1 - 1 / (1 + 3 \cdot w^2 / 2\pi \cdot G \cdot \mu)^{1/2} \quad (11)$$

A Tabela 1, mostra os valores do achatamento calculados com auxílio da equação (11) e os respectivos valores observados. Pode-se verificar uma coincidência nesses valores para a Terra; enquanto que, para os demais planetas observamos alguns valores discrepantes. Acredito que a explicação deste fato, reside nas observações óticas do raio polar e equatorial de cada planeta. As medidas de R_e e R_p , observadas na Tabela 1, devem incluir, exceto para a Terra, uma capa espessa de atmosfera, principalmente, para o planeta Júpiter onde a discrepância é bem acentuada; e isto entra em desacordo com uma das hipóteses fundamentais deste trabalho, de que o planeta está no estado líquido. Talvez fosse possível que um suposto habitante de Júpiter, usasse a expressão (11) e chegasse num valor aceitável para o achatamento de seu planeta, porém, com a mesma equação, cometesse algum erro para o planeta Terra.

Planeta	R_e (10^4 m)	R_p (10^4 m)	w (10^{-5} rad/s)	μ (10^3 kg/m ³)	e (observado)	e (calculado)
Terra	637,8	635,6	7,293	5,5	0,0034	0,0034
Marte	341,7	340	7,089	4,0	0,0050	0,0045
Júpiter	7135	6693	17,6	1,3	0,062	0,076
Saturno	6040	5460	17,1	0,7	0,096	0,12
Urano	2380	2237	16,2	1,6	0,060	0,054
Netuno	2220	2176	11,0	1,7	0,020	0,025

TABELA 1 - Esta tabela apresenta valores calculados e observados para o achatamento de seis planetas⁽²⁾. Para os valores calculados do achatamento foi usada a equação (11).

A expressão (7) apresenta um valor máximo para $\cos(2\lambda_0) = -K / (1 - K)$, onde $K = 3 \cdot w^2 / 4\pi \cdot G \cdot \mu$. Com o auxílio da mesma expressão representamos, graficamente, as variações que apresenta o ângulo entre as forças dF_G e dP , para a Terra e Saturno, desde o equador até o polo. As maiores variações do $\sin \beta$ foram verificadas para o planeta Saturno (ver Fig. 4 e Fig. 5), cujo valor máximo ocor



Figs. 4 e 5 - As Fig. 4 e Fig. 5 indicam as variações do ângulo entre as forças dF_G e dP , para a Terra e Saturno, respectivamente.

re para $\lambda_0 \approx 50^\circ$. A Terra e Marte apresentam o máximo da variação do $\text{sen } \beta$ em, aproximadamente, 45° (ver Tabela 2).

Planeta	$K(10^{-2})$	λ_0	$\text{sen } \beta_{\text{max}} (10^{-3})$
Terra	0,35	45	1,7
Marte	0,45	45	2,3
Júpiter	8,5	47	44
Saturno	15	49	79
Urano	5,9	47	31
Netuno	2,5	46	12

TABELA 2 - Esta tabela apresenta valores calculados para λ_0 e $\text{sen } \beta_{\text{max}}$ para vários planetas. Pode-se verificar que o maior valor de λ_0 ocorre para Saturno devido a sua velocidade angular, relativamente alta, e sua pequena densidade.

REFERÊNCIAS

- (1) G.H.A. Cole, The Structure of Planets (The Wykeham Science Series), ver capítulo 3, pág. 31, 1978.
- (2) Jay S. Bolemon, Shape of the Rotating Planets and the Sun: A calculation for elementary mechanics, American Journal of Physics, vol. 44/11, novembro de 1976, pág. 1125. A Tabela 2 foi obtida através deste artigo.
- (3) David Halliday and Robert Resnick, Physics, for Students of Science and Engineering, pág. 357 (1960, J. Wiley & Sons).