

CARTA AO EDITOR

Sobre o Teorema de Poynting

O teorema de Poynting é bem conhecido. Partindo da potência realizada por unidade de volume pelo campo elétrico, chega-se à equação de balanço da energia, identificando-se o fluxo de energia como o vetor de Poynting. Usualmente o Teorema é deduzido tendo como objetivo a aplicação a meios materiais e identifica-se a potência realizada por unidade de volume como o efeito Joule [1]. Queremos aqui chamar a atenção para o fato de que, com isso, omite-se outra contribuição legítima à potência realizada pelo campo elétrico  $\vec{E}$ : é a potência necessária para criar a polarização do meio. Esta é igual à  $\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ , sendo  $\vec{P}$  a polarização e  $t$  o tempo. De fato, as demonstrações consideram como potência realizada por unidade de volume unicamente o termo ohmico,  $\vec{J} \cdot \vec{E}$ , sendo  $\vec{J}$  a densidade de corrente de condução. Podemos nos convencer da necessidade de se introduzir este termo devido à criação da polarização (deverá ocorrer outro devido à magnetização), lembrando que no tratamento termodinâmico da polarização [2], está claramente estabelecido que o trabalho realizado pelo campo é  $\vec{E} \cdot d\vec{D}/4\pi$ , com  $\vec{D}$  o

deslocamento elétrico. Sendo  $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$ , resulta para aquele trabalho,  $\vec{E} \cdot d\vec{E}/4\pi + \vec{E} \cdot d\vec{P}$ . O primeiro termo é o trabalho para aumentar o campo no vácuo, e é uma diferencial exata. O outro depende das características do material e de variáveis termodinâmicas. No caso da magnetização, o trabalho é  $\vec{H} \cdot d\vec{B}/4\pi$ , igual a  $\vec{H} \cdot d\vec{H}/4\pi + \vec{H} \cdot d\vec{M}$ , sendo  $\vec{B}$ ,  $\vec{H}$  e  $\vec{M}$ , respectivamente, a indução, o campo magnético e a magnetização. A consideração desses termos nas potências realizadas por unidade de volume pelo campos elétrico e magnético no teorema de Poynting não leva a mudanças algébricas radicais na sua dedução, como veremos a seguir.

Como usualmente apresentado [1,2], o teorema de Poynting consiste em substituir no produto  $\vec{J} \cdot \vec{E}$ ,  $\vec{J}$  por seu valor extraído da equação de Maxwell,  $\nabla \times \vec{H} = (1/c)(4\pi\vec{J} + \partial\vec{D}/\partial t)$ , e usar a identidade da divergência do produto vetorial,  $\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot \nabla \times \vec{E} - \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H}$ , com  $\nabla \times \vec{E} = -(1/c)\partial\vec{B}/\partial t$ . Integrando-se o resultado num volume fechado  $V$ , limitado pela superfície  $S$ , de versor normal  $\hat{n}$ , resulta

$$-\int_V \vec{J} \cdot \vec{E} dV = \frac{1}{4\pi} \int_V (\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) dV + \frac{c}{4\pi} \int_S \vec{E} \times \vec{H} \cdot \hat{n} dS. \tag{1}$$

$\vec{D}$  e  $\vec{B}$  são agora expressos, respectivamente, em termos de  $\vec{E}$  e  $\vec{P}$ , e de  $\vec{H}$  e  $\vec{M}$ , e, transpondo para o lado esquerdo da Eq. (1) os termos em  $\vec{E} \cdot \partial\vec{P}/\partial t$  e  $\vec{H} \cdot \partial\vec{M}/\partial t$ , chega-se a

$$-\int_V [\vec{J} \cdot \vec{E} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial t}] dV = \int_V \frac{\partial u_0}{\partial t} dV + \frac{c}{4\pi} \int_S \vec{E} \times \vec{H} \cdot \hat{n} dS \tag{2}$$

em que  $u_0$  é a densidade de energia eletromagnética no vácuo

$$u_0 = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{H}^2) \tag{3}$$

ou, re-escrevendo a Eq. (2),

$$-\int_V [\vec{J} \cdot \vec{E} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial t}] dV - \frac{c}{4\pi} \int_S \vec{E} \times \vec{H} \cdot \hat{n} dS = \int_V \frac{\partial u_0}{\partial t} dV. \tag{4}$$

Começando no lado direito da Eq. (4), temos que a perda temporal da energia puramente eletromagnética no volume  $V$  é igual à soma da potência realizada pelos campos elétrico e magnético no volume  $V$  e do fluxo de energia puramente eletromagnética que flui para o

exterior do volume (fluxo do vetor de Poynting).

Note-se que no presente tratamento não foi necessário admitir que o meio é linear, isto é, que as polarizações e magnetizações são, localmente, proporcionais aos respectivos campos.

O nosso tratamento foi feito no sistema Gaussiano.

No sistema Internacional, as Eqs. (3) e (4) se escrevem

$$u_0 = \frac{1}{2}(\epsilon_0 \vec{E}^2 + \mu_0 \vec{H}^2), \quad (5)$$

$$- \int_V [\vec{J} \cdot \vec{E} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial t}] dV - \int_S \vec{E} \times \vec{H} \cdot \hat{n} dS = \int_V \frac{\partial u_0}{\partial t} dV, \quad (6)$$

sendo  $\epsilon_0$  e  $\mu_0$  a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética do vácuo, respectivamente.

Enquanto que, nos meios materiais, o termo  $\vec{J} \cdot \vec{E}$ , como calor Joule, representa um processo irreversível, nada se pode dizer a respeito dos termos elétrico e magnético no integrando do lado esquerdo da Eq. (6), até que o processo seja especificado. Se este, no seu desenvolvimento temporal, envolve histerese elétrica ou magnética, haverá produção de calor, e adicional con-

tribuição à irreversibilidade.

1. J. D. Jackson, , *Classical Electrodynamics*, Wiley, N. York.,1975, 2a. edição, Cap. 6.
2. M. Abraham and R. Becker, *Classical Theory of Electricity and Magnetism*, Blackie and Sons, 1952, part IV.

G. F. Leal Ferreira  
Instituto de Física de São Carlos, USP