

Pêndulo Invertido: Dinâmica Complexa num Sistema Mecânico Simples

Nikolai Pavlovitch Tretiakov, Terezilda Luiz da Silva, Henrique Almeida Fernandes

*Instituto de Física, Universidade Federal de Goiás
Caixa Postal 131, CEP: 74001-970 Goiania (GO), Brasil*

Recebido em 30 de Julho, 1998

A dinâmica do pêndulo simples invertido com o ponto de suspensão oscilante é considerada. A condição de equilíbrio do pêndulo na posição vertical invertida é derivada, utilizando o formalismo de Lagrange e métodos matemáticos simples. Mostra-se que a posição horizontal pode se tornar estável também, mediante o movimento apropriado do ponto de suspensão.

The dynamics of an inverted pendulum with vibrating suspension point is considered. The equilibrium condition at top position is derived using the Lagrange formalism and simple mathematical tools. The possibility of stabilization at horizontal position is demonstrated too.

I Introdução

A mecânica é frequentemente vista como uma área estabelecida, onde não se podem esperar descobertas que possam influenciar outras áreas. Porém, no ensino e na pesquisa, tem que haver uma preocupação constante com o caráter global que pode estar associado a um dado fenômeno [1]. Esse caráter global pode se apresentar como um princípio com diversas manifestações em áreas totalmente diferentes.

Neste trabalho, visamos mostrar como se podem descobrir fenômenos complexos e inesperados até nos sistemas mais simples, cuja descrição está ao alcance de alunos principiantes.

Com essa finalidade, escolhemos um exemplo, talvez o mais simples de todos: um pêndulo simples. Para descobrir uma dinâmica complexa nesse sistema, basta virar o pêndulo para cima (figura 1). A posição $\theta = 0$ neste caso, será a posição de equilíbrio, pois o torque $M = mgL \sin \theta$ anula-se. Essa posição, porém, não é estável, pois nela $dM/d\theta = mgL \cos \theta > 0$. Isso significa que qualquer desvio do pêndulo da posição $\theta = 0$ gera o torque positivo, isso é, voltado para fora desta posição.

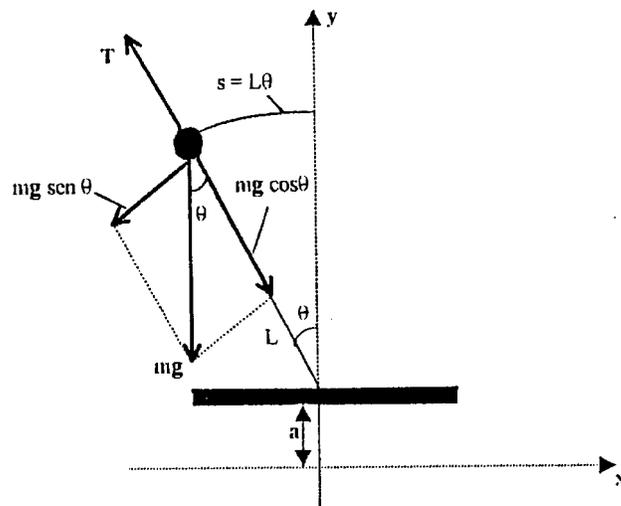


Figura 1. Modelo do pêndulo invertido com o ponto de suspensão oscilante.

Existe um método simples para tornar a posição do pêndulo “para cima” estável. Se aplicarmos as vibrações verticais ao ponto de suspensão do pêndulo (figura 2), notaremos que o mesmo vai permanecer voltado para cima se a frequência das vibrações superar um certo valor que depende dos parâmetros do pêndulo. Mais ainda, se tocarmos nele, o pêndulo vai oscilar em torno da posição para cima da mesma maneira que um pêndulo comum oscilaria voltado para baixo. Esse fenômeno interessante, que ocorre num sistema tão simples como um pêndulo, foi descoberto só neste século [2]

e até hoje está despertando um interesse constante entre pesquisadores [3].

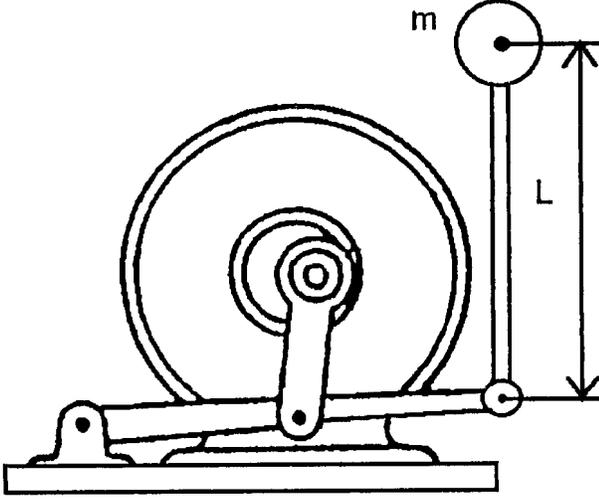


Figura 2. Dispositivo mecânico: pêndulo invertido com o ponto de suspensão vibrante. A frequência das vibrações depende da velocidade do motor elétrico.

II Oscilador forçado: solução para trajetórias médias

A explicação teórica do fenômeno é bastante simples. Consideremos uma equação de movimento de um os-

cilador não linear com uma força restauradora $f(x)$ e sujeito à ação de uma força externa periódica com amplitude $F(x)$ [4]:

$$m\ddot{x} + f(x) = F(x)\cos(\Omega t). \quad (1)$$

Aqui $\Omega \gg 1/T$, onde $T = 2\pi/\omega_0$ é o período característico do pêndulo não perturbado. A idéia básica consiste em procurar as soluções da equação (1) na forma

$$x(t) = X(t) + \mu\chi(t), \quad (2)$$

onde $X(t)$ e $\chi(t)$ são as partes “lenta” e “rápida”, isto é, as taxas de variação temporal dessas funções são $T \sim 2\pi/\omega_0$ e $\tau \sim 2\pi/\Omega$ respectivamente, e $\mu = \omega_0/\Omega \ll 1$.

A justificativa física da solução (2) se dá ao fato de que o sistema, por causa da inércia, responde fracamente às pulsações rápidas da força externa. Substituindo (2) na equação (1) e expandindo todas as funções na aproximação linear em μ :

$$f(X + \mu\chi) \approx f(X) + \mu\chi \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_X; F(X + \mu\chi) \approx f(X) + \mu\chi \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_X, \quad (3)$$

obtemos a equação

$$m\ddot{X} + \mu m\ddot{\chi} = -f(X) - \mu\chi \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_X + \left[F(X) + \mu\chi \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_X \right] \cos(\Omega t). \quad (4)$$

Essa equação contém termos de dois tipos: “lentos” e “rápidos”. Para separar esses termos, podemos determinar a média temporal sobre o período rápido $\tau = 2\pi/\Omega$ ($\langle \dots \rangle_\tau = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau (\dots) dt$). Mais precisamente, a equação (4) tem a forma: *Lento* + *Rápido* = 0. Os termos lentos variam pouco durante o período τ , portanto, $\langle \text{Lento} \rangle_\tau \approx \text{Lento}$. A equação toma a forma: $\langle \text{Lento} \rangle_\tau + \text{Rápido} = 0$. Por outro lado, é claro que $\langle \text{Rápido} \rangle_\tau = 0$ (por exemplo, $\int_0^\tau \cos(\frac{2\pi}{\tau}t) dt = 0$). Portanto, aplicando $\langle \dots \rangle_\tau$ à

nossa equação mais uma vez, conseguimos separar as equações: $\langle \text{Lento} \rangle_\tau \approx 0$; *Rápido* ≈ 0 . Então, o primeiro passo consiste em tomar a média $\langle \dots \rangle_\tau$ da equação (4). Somente os termos lentos sobrevivem a essa operação. Os demais termos formam a equação rápida. O resultado é:

$$m\ddot{X} \approx -f(X) + \left\langle \mu\chi \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_X \cos(\Omega t) \right\rangle_\tau; \quad (5)$$

$$\mu m \ddot{X} \approx -\chi \mu \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_X + F(X) \cos(\Omega t). \quad (6)$$

Na equação rápida (6), os termos tem ordens diferentes. O termo $\mu \ddot{X}$ é da ordem de $\mu \Omega^2 \chi \sim \omega_0 \Omega \chi$ (porque $\chi \sim \cos(\Omega t)$). Esse termo não é pequeno. Ao contrário, o termo $\mu \chi \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_X$ é muito menor e pode ser desprezado. Assim, a equação pode ser integrada e resulta:

$$\chi \approx -\frac{F(X)}{\mu m \Omega^2} \cos(\Omega t). \quad (7)$$

Essa é a resposta rápida do sistema à ação da força externa. O ponto central dessa teoria é que isso não é uma única resposta do sistema. As trajetórias médias $X(t)$ são afetadas também. Substituindo (7) na equação (5), calculando a média e observando que $\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \cos^2 \left(\frac{2\pi}{\tau} t \right) dt = 1/2$, obtemos

$$m \ddot{X} + f(X) + \frac{1}{2} \frac{F(X)}{m \Omega^2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_X = 0 \quad (8)$$

O resultado (8) é muito importante. Ele representa a equação de movimento efetivo de um oscila-

dor não linear sujeito à ação de uma força externa de alta frequência (1). O último termo na equação (8) é uma nova força efetiva gerada pela força externa. Vamos mostrar, que no caso do pêndulo, essa força adicional pode estabilizá-lo na posição para cima ou até na posição horizontal.

III Pêndulo Simples Forçado: Consideração Teórica

O modelo teórico do pêndulo invertido é mostrado na figura 1. O ponto de suspensão está vibrando na direção vertical com amplitude A e frequência Ω : $a(t) = A \cos(\Omega t)$.

A equação de movimento do pêndulo pode ser obtida facilmente no formalismo de Lagrange. Os componentes da velocidade são $v_x = L \dot{\theta} \cos \theta$, $v_y = -L \dot{\theta} \sin \theta + \dot{a}(t)$, e assim obtemos a energia cinética e a energia potencial:

$$T = \frac{m}{2} (L \dot{\theta})^2 + \frac{m}{2} \dot{a}^2(t) - mL \dot{\theta} \dot{a}(t) \sin \theta; \quad U = mgL \cos \theta + mga(t). \quad (9)$$

Portanto, o lagrangiano $L = T - U$ é:

$$L = \frac{m}{2} (L \dot{\theta})^2 - mgL \cos \theta - mga(t) - mL \dot{\theta} \dot{a}(t) \sin \theta + \frac{m}{2} \dot{a}^2(t). \quad (10)$$

A equação de Euler $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \theta}$ para o lagrangiano (10) toma a forma

$$\ddot{\theta} - \frac{g}{L} \sin \theta = -\frac{A \Omega^2}{L} \sin \theta \cos(\Omega t). \quad (11)$$

Essa equação de movimento do pêndulo invertido tem a forma geral (1). Então, a teoria da seção 2 pode ser aplicada. Se denominarmos o ângulo médio como φ (significa $\varphi \equiv X$), a equação efetiva (8) se reduz a:

$$mL^2 \ddot{\varphi} - mgL \sin \varphi = -\frac{mA^2 \Omega^2}{4} \sin(2\varphi). \quad (12)$$

A equação de movimento para o ângulo médio φ . O movimento real do pêndulo consiste em uma superposição das oscilações rápidas $\chi(t)$ e do movimento mais lento ao longo das trajetórias $\varphi(t)$:

$$\theta(t) = \varphi(t) + \mu \chi(t) \quad (13)$$

Podemos reescrever a equação (12) como $mL \ddot{\varphi} = M_{ef}$, onde o torque efetivo $M_{ef} = mgL \sin \varphi - \frac{mA^2 \Omega^2}{4} \sin(2\varphi)$. A condição de equilíbrio e $M_{ef} = 0$, que é satisfeito na posição $\varphi = 0$. Mas essa posição só se torna estável se $\left(\frac{dM_{ef}}{d\varphi} \right)_{\varphi=0} < 0$ (torque restaurador). Então, obtemos a condição de estabilidade do pêndulo invertido com o ponto de suspensão oscilante:

$$A \Omega > \sqrt{2gL} \quad (14)$$

Na equação (14) A é a amplitude das vibrações do ponto de suspensão e Ω é a frequência. Portanto, $A \Omega$

é a velocidade linear média do ponto de suspensão. A condição (14) mostra que essa velocidade tem que superar uma certa velocidade característica, $v_{min} = \sqrt{2gL}$, para que o pêndulo seja estável na posição vertical invertida. Cabe destacar, que esse critério quantitativo coincide muito bem com dados experimentais.

IV Estabilidade na Posição horizontal

Se a possibilidade de estabilizar um pêndulo na posição para cima já é um fato interessante, a possibilidade de fazê-lo na posição horizontal parece incrível. Porém, isso não é impossível. Só que neste caso, as vibrações do ponto de suspensão tem que ter componentes horizontal e vertical: $a_x(t)$, $a_y(t)$. Utilizando o formalismo de Lagrange, como na seção 3, derivamos a equação de

movimento:

$$\ddot{\theta} - \frac{g}{L}\text{sen}\theta = \frac{\ddot{a}_y(t)}{L}\text{sen}\theta - \frac{\ddot{a}_x(t)}{L}\cos\theta \quad (15)$$

Vamos considerar um caso mais geral de movimento do ponto de suspensão:

$$\begin{aligned} a_y(t) &= A\cos(\Omega t) + B\text{sen}(\Omega t) \\ a_x(t) &= C\cos(\Omega t) + D\text{sen}(\Omega t) \end{aligned} \quad (16)$$

Como na seção 2, procuramos a solução da equação (15) na forma de uma soma de duas partes: lenta e rápida: $\theta(t) = \varphi(t) + \beta(t)$ (aqui $\beta(t) \equiv \mu\chi(t)$). Utilizando o raciocínio e os procedimentos da seção 2, achamos a resposta oscilante do sistema:

$$\beta(t) \approx \frac{1}{L}(\text{sen}\varphi a_y(t) - \cos\varphi a_x(t)), \quad (17)$$

bem como, a equação efetiva para o ângulo médio φ :

$$\begin{aligned} mL^2\ddot{\varphi} &= mgL\text{sen}\varphi + m[\text{sen}\varphi\cos\varphi(\langle \ddot{a}_y(t)a_y(t) \rangle - \langle \ddot{a}_x(t)a_x(t) \rangle) + \\ &\text{sen}^2\varphi \langle \ddot{a}_x(t)a_y(t) \rangle - \cos^2\varphi \langle \ddot{a}_y(t)a_x(t) \rangle] \end{aligned} \quad (18)$$

Analizemos agora a posição horizontal $\varphi = \pi/2$. Neste caso, o torque efetivo na equação (18) se reduz a

$$M_{ef}\Big|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = mgL + \langle \ddot{a}_x(t)a_y(t) \rangle \quad (19)$$

O cálculo da média dá:

$$\langle \ddot{a}_x(t)a_y(t) \rangle = -\Omega^2(AC + BD)/2.$$

Os critérios de estabilidade $M_{ef} = 0$, $\frac{dM_{ef}}{d\varphi} < 0$ na posição $\varphi = \pi/2$ são:

$$AC + DB = \frac{2gL}{\Omega^2} \quad ; \quad C^2 + D^2 > A^2 + B^2 \quad (20)$$

Então, para estabilizar um pêndulo na posição horizontal, basta dar ao ponto de suspensão o movimento (16) com as amplitudes sujeitas às condições (20). É claro, que existem muitas possibilidades diferentes de fazê-lo. A segunda condição (20) diz que o movimento do ponto de suspensão deve ser “mais intenso” na direção horizontal (amplitudes C, D) do que na vertical (amplitudes A, B). Mas só o movimento horizontal

não é suficiente: com $A = B = 0$ é impossível satisfazer às condições (20).

A equação (18) é válida para qualquer ângulo. Podemos deduzir, então, as condições de estabilidade do pêndulo a um ângulo arbitrário. Essa estabilização fica possível mediante um movimento apropriado do ponto de suspensão.

V Conclusão

O exemplo do pêndulo invertido mostra que uma ação rápida externa (“fast driving”) é capaz de mudar completamente as propriedades e o comportamento de um sistema e pode fazer coisas que parecem milagres (estabilização do pêndulo a qualquer ângulo). Um sistema forçado (“driven system”) não é mais ele mesmo e pode permanecer nos estados absolutamente impossíveis nas condições normais. O interesse por sistemas forçados vem crescendo nos últimos anos. Recentemente, fizemos uma generalização da teoria ex-

posta no presente artigo para uma classe muito geral de sistemas dinâmicos [5]. Uma descoberta dos efeitos análogos ao pêndulo invertido nos sistemas mais complexos (plasma, cristais etc) seria de um grande interesse.

Nikolai P. Tretiakov agradece ao CNPq o apoio à pesquisa.

Referências

1. M.J. Menon e R.P. Barbosa dos Santos, Revista Brasileira de Ensino de Física **20**, 38 (1998).
2. P.L. Kapitza, in *Collected Papers of P.L. Kapitza*, edited by D. Ter Haar (Pergamon, London, 1965), p. 714.
3. S-Y. Kim and B. Hu, Phys. Rev. E (to be published); [chao-dyn/9802015](#).
4. M.I. Rabinovitch and D.I. Trubetskov, *Introduction to the Theory of Oscillations and Waves* (Nauka, Moscow, 1984, in Russian).
5. Nikolai P. Tretiakov, J.N.Teixeira Rabelo, Fast Driving: effective Hamiltonian equations for Classical Systems, submitted for publication; [cond-mat/9806137](#).