

# Não-Localidade na Mecânica Quântica

B. J. Mokross

*Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo*

*Caixa Postal 369, São Carlos, SP 13560-970, Brazil*

Trabalho recebido em 10 de agosto de 1996

Após a criação da Mecânica Quântica surgem inconsistências que foram sintetizadas em 1935 no Paradoxo de Einstein, Podolsky e Rosen. Em 1964 Bell colocou este paradoxo em termos quantitativos o que permitiu a execução de experimentos que concluíram pela validade da Mecânica Quântica, dando plausibilidade ao conceito de não-localidade. Em 1952 Bohm apresenta uma teoria causal baseada nas idéias apresentadas por de Broglie em 1927. Um dos produtos é o potencial quântico que contém aspectos não-locais e que permite a análise de situações que nesta teoria deixam de ser paradoxais.

## Abstract

In 1935 Einstein, Podolsky and Rosen presented a paradox which sintetizes some inconsistencies which have been bothering physicists since the creation of Quantum Mechanics. In 1964 Bell develops a theorem which allows experimental verification of the validity of Quantum Mechanics giving plausability to non-locality. In 1952 Bohm, develops the ideas presented by de Broglie in 1927 into a full fledged causal quantum theory. One of its products is a new type of potential with non-local ingredients. This quantum potential allows the the understanding of situations which int his theory are no paradoxes anymore.

## I. Introdução

A publicação das leis de Newton em 1687 provocou uma revolução no método científico e se constituiu numa proposta para explicar de maneira unificada diversos fenômenos naturais até então conhecidos, principalmente através dos trabalhos de Galileu e Kepler. Nesta obra Newton enunciou três leis com base em alguns conceitos cuja definição aprimorou (momento, massa, força e aceleração, etc.) conseguindo unificar dentro de uma só estrutura teórica inúmeros fenômenos aparentemente distintos. De maneira geral a reação da comunidade científica foi de aceitação dentro de um clima de admiração e de pasmo. A genialidade humana havia conseguido o que era altamente desejado: a unificação dos conhecimentos. A teoria de Newton, quase que uma extensão engenhosa da geometria euclidiana para os fenômenos naturais, passa a ocupar uma posição central na percepção humana da natureza.

Seguiu-se um longo período de tranquilidade no mundo científico. A essência da física newtoniana era

irresistível. Foi desdobrada em diversas formulações, como a de Lagrange, Hamilton, Hamilton-Jacobi e outras, culminando no alicerçamento da Mecânica Estatística e do Eletromagnetismo. Era consenso que a metodologia newtoniana acrescida de alguns conceitos suplementares, inerentes ao objeto de estudo, era suficiente para a compreensão e predição de todos fenômenos naturais.

Entretanto no final do século XIX e início do século XX alguns resultados experimentais começaram a minar o universo sereno da física clássica. O desenvolvimento tecnológico dos processos experimentais permitiu medidas cada vez mais sofisticadas e já em 1890 foram detetados fenômenos que estavam em conflito direto com os conceitos físicos da época. Eram fenômenos que além da impossibilidade de serem compreendidos e explicados, eram inconsistentes com as tentativas de estender os conceitos clássicos. Foi necessário estabelecer hipóteses “ad hoc”, aparentemente absurdas, para ao menos estabelecer relações empíricas qua reprodu-

zissessem de maneira satisfatória alguns resultados experimentais. Foi assim que teve início a teoria quântica. Em 1900 Max Planck ao elaborar as leis empíricas da radiação do corpo negro<sup>[1]</sup>, se viu forçado a introduzir o “quantum universal de ação”. Esta revolucionária discretização da energia foi reforçada pelas considerações de Einstein em 1905<sup>[2]</sup> sobre o efeito foto-elétrico e sobre o calor específico em sólidos. Estes trabalhos estabeleceram de maneira indiscutível que a radiação eletromagnética, além das características de onda, também apresentava características próprias de partículas.

Em 1913, dois anos após a descoberta do núcleo atômico por Rutherford<sup>[3]</sup>, Niels Bohr elaborou sua famosa teoria sobre o espectro de radiação do átomo de hidrogênio<sup>[4]</sup> estabelecendo as bases para a explicação das propriedades específicas do átomo químico. Seu modelo “planetário” postulava a existência de órbitas eletrônicas estáveis em torno de um núcleo eletricamente positivo em franca contradição com as previsões das equações clássicas de Maxwell. O sucesso do modelo de Bohr fez com que os desenvolvimentos teóricos que se seguiram estivessem imbuídos de uma forte componente pragmática. A ‘Teoria Quântica Antiga’ adotava uma metodologia para o estudo de sistemas dinâmicos que se dividia em três etapas: primeiro, se aplicava a Mecânica Clássica para a determinação dos movimentos possíveis do sistema; segundo, impunha-se certas condições quânticas para a seleção dos movimentos permitidos e finalmente, na terceira etapa, efetuava-se o tratamento dos processos radiativos, como transições entre os movimentos permitidos, sujeitos à fórmula desenvolvida por Bohr. Este esquema pelo qual se introduz na Física Clássica conceitos, postulados e hipóteses em franca contradição com a mesma, permitiu prever diversos fenômenos até então totalmente inexplicáveis, principalmente na área da espectroscopia ótica<sup>[5]</sup>.

Em 1925 Heisenberg apresenta uma nova teoria, totalmente quântica<sup>[6]</sup>, comumente designada por Mecânica Quântica Matricial. Nesta sua formulação a noção de órbitas eletrônicas é abandonada e a cada grandeza física é associada uma certa matriz que obedece a uma álgebra não comutativa. Alguns meses após, Schrödinger<sup>[7]</sup> elaborou a Mecânica Quântica Ondulatória. Com base nas idéias de de Broglie<sup>[8]</sup> e me-

diantes considerações qualitativas e quantitativas descobriu uma equação para a propagação de uma função de onda que representa o estado quântico. Pouco tempo depois<sup>[9]</sup> ele demonstra que sua teoria é idêntica à de Heisenberg apesar de cada uma delas se basear em pressupostos distintos. Outras formulações se seguiram, como a de Dirac, de Schwinger e de Feynmann. Todas elas confirmavam de maneira espetacular os resultados experimentais que se multiplicavam. Posteriormente o desenvolvimento da Eletrodinâmica Quântica permitiu prever, com precisão até então inimaginável, praticamente todos os fenômenos naturais, com exceção daqueles que envolvem forças gravitacionais. Este sucesso, de natureza eminentemente epistemológica<sup>1</sup>, imbuíu a comunidade científica de uma postura positivista em que o sucesso da física se espelhava na sua capacidade de prever e manipular experimentos cada vez mais espetaculares.

Neste ponto é importante ressaltar que a Teoria Quântica (em todas as formulações) abandona a noção clássica de trajetória e de sistema e não se preocupa em estabelecer de forma objetiva um paradigma para a constituição da matéria em correspondência com a concepção de partículas e/ou campo da física clássica; a Mecânica Quântica (MQ) se assemelha a um conjunto de regras para o cálculo de resultados prováveis de certos processos denominados ‘medidas’ que, como veremos adiante, não são bem definidos.

Esta atitude prevaleceu no período que segue os anos 40 até os anos 80. Era uma postura pragmática. Os experimentos se efetuavam sobre aplicações intrinsecamente Quânticas como por exemplo nas interações de ftons, núcleos atômicos e partículas elementares, na teoria de masers e de lasers, nas propriedades da matéria (superfuides, supercondutividade, semicondutores), etc. Para estas aplicações a técnica experimental empregada estava longe do domínio quântico pois a única característica da teoria Quântica da medida que se manifestava nos experimentos era a interpretação probabilística do quadrado das amplitudes da função de onda.

A partir dos anos 80 os desenvolvimentos tecnológicos foram enormes e tornou-se possível efetuar experimentos que entre os anos 20 e 30 apenas podiam

<sup>1</sup> Epistemologia: é o estudo que se focaliza na maneira ou na forma como adquirimos nosso conhecimento (e a possibilidade do que podemos realizar com este conhecimento).

ser imaginados pelos ‘pais fundadores’ da MQ. Nesta época Bohr, von Neumann e outros, tentavam estabelecer as bases ontológicas<sup>2</sup> da Teoria Quântica. Sem a possibilidade tecnológica de efetuar certos experimentos fundamentais tiveram que se contentar com “Gedankenexperimente” e, analisando o processo de medida de uma propriedade física de um sistema, concluíram pela necessidade de introduzir o conceito um tanto quanto duvidoso do “colapso da função de onda”<sup>[10]</sup>. Segundo este conceito, o processo de observação interfere no estado do sistema. Antes da medição a propriedade a ser medida tem um caráter intrinsecamente estatístico conforme a interpretação de Born<sup>[11]</sup>. Ao efetuar a medida, a função de onda do sistema de alguma forma “colapsa” e passa a ser um dos possíveis auto-estados que o sistema, anteriormente à medição, apenas tinha como potencialmente possível. Desta forma o observador deixa de ser alheio ao processo físico e passa a ser um integrante necessário do mesmo. Esta maneira de interpretar o processo de medida deu margem a inúmeras discussões e gerou vasta literatura sobre o assunto (um desdobramento interessante é o Paradoxo do Gato apresentado por Schrödinger<sup>[12]</sup> que resulta da extensão do conceito de medida Quântica ao mundo macroscópico).

Em 1935 Einstein, Podolski e Rosen (EPR)<sup>[13]</sup> utilizando de forma engenhosa os conceitos da MQ juntamente com proposições sobre localidade, realidade e de completude teórica (totalmente plausíveis) demonstraram que em certas ocasiões os estados quânticos, ou apresentam a propriedade de não-localidade, ou não são descrições completas da realidade física. Uma vez que a não-localidade implica na possibilidade da transmissão de sinais com velocidade maior do que a da luz, preferiram se manter à conclusão da incompletude. Este paradoxo ou proposição de EPR é analisado com detalhe na seção 3 do presente artigo.

Na seção 2, antes de abordarmos o paradoxo EPR, descrevemos 3 experimentos que apresentam peculiaridades que fogem ao nosso senso comum (natureza partícula-onda, não localidade, holismo, etc.) e que segundo Born, apenas conseguimos aceitar após estarmos imbuídos do que ele designou por “intuição Quântica”.

Em 1964, Bell<sup>[14]</sup> analisou o paradoxo EPR sob a perspectiva de Bohm<sup>[15]</sup> e derivou uma desigualdade que abria a possibilidade de verificar experimental-

mente as conclusões de EPR sobre incompletude. Este trabalho é considerado como uma das descobertas seminais da física do século XX pois equaciona de maneira clara e precisa aspectos fundamentais da MQ que antes eram apenas objeto de divagações. Esta desigualdade será derivada na seção 4.

O paradoxo de EPR e o teorema de Bell sintetizam de forma objetiva toda discussão que vem sendo travada sobre os fundamentos da MQ desde a sua criação. São elementos indispensáveis para aquilatar a importância do trabalho realizado por David Bohm na década de 50. No sua famosa publicação de 1952<sup>[16]</sup> ele apresenta uma interpretação ontológica da MQ dando origem à Teoria de de Broglie-Bohm (TdBB). Na seção 5 discorreremos sobre a mesma e apresentamos um resumo dos conceitos e postulados sobre os quais ela se baseia e veremos que não se trata apenas de uma mera reformulação da equação de Schrödinger. Constitui-se numa teoria que estabelece uma clara correspondência entre os paradigmas clássicos e quânticos, o que não é possível na MQ convencional pois a função de onda (que contém toda a informação possível do sistema) não contém a concepção clássica como um caso especial. Esta interpretação, de início, foi fortemente rejeitada por eminentes pesquisadores com argumentos que nem sempre eram de caráter exclusivamente científico<sup>[17]</sup>. Em 1979 Philipidis, Dewdney e Hiley<sup>[18]</sup> utilizando a TdBB estudaram através de cálculos numéricos a interferência de elétrons quando impingem sobre um painel com duas fendas. Obtiveram resultados numéricos e gráficos, que causaram forte impacto na comunidade, ficando evidenciada a plausibilidade do modelo como ferramenta de pesquisa. Este trabalho descrevemos na seção 6.

Infelizmente a inclusão da propriedade de spin na TdBB requer considerações adicionais de certa extensão, o que nos obriga a relegar para uma próxima oportunidade a análise detalhada do paradoxo EPR. Isto entretanto não prejudica a apresentação da TdBB que provemos neste artigo juntamente com o contexto científico dentro do qual ela se originou. Na conclusão veremos que a teoria (como todas as teorias) contém imperfeições, que no entanto não lhe tiram o mérito de esclarecer diversos aspectos fundamentais de natureza Quântica. Com base nos seus conceitos ontológicos,

<sup>2</sup>Ontologia: é o estudo “daquilo que é”. A forma ou a maneira de como obtivemos o conhecimento tem importância secundária.

que tem paradigmas fortemente estabelecidos na Física Clássica, explicaremos a não localidade provada pela verificação experimental<sup>[19]</sup> do teorema de Bell, descreveremos processos quânticos individuais (a MQ convencional apenas explica de maneira satisfatória sistemas representados por ensembles estatísticos) sem a necessidade do conceito de “colapso da função de onda e esclareceremos a dualidade partícula-onda. São aspectos que tem intrigado os físicos desde os princípios da MQ e acreditamos que a visão proporcionada pela TdBB não pode passar despercebida àqueles que se preocupam em entender a natureza das coisas.

**II. Duas experiências quânticas**

Os experimentos que vamos descrever já foram tratados exaustivamente na literatura, inicialmente sob a forma de “Gedankenexperimente” e posteriormente em laboratórios, com fluxos de partículas ou fótons. Sómente após os anos 80, com o surgimento de novas técnicas experimentais, foi possível efetuá-las com partículas individuais, isto é fóton a fóton, ou elétron a elétron<sup>[20]</sup>, e os resultados, quando analisados individualmente para cada partícula, foram ainda mais surpreendentes.

**II.1. Interferência de partículas ao passarem por uma dupla fenda**

Esta experiência pode ser efetuada com elétrons ou fótons. Na Fig. 1a), S representa uma fonte de partículas de intensidade suficientemente baixa de forma a emitir uma partícula por vez. O filtro em A seleciona as partículas que têm a mesma energia. Estas, vindo de A impingem sobre o painel B vindo de todas direções. O painel B tem duas fendas, 1 e 2, através das quais as partículas podem passar. Finalmente atrás do painel B, sobre um plano C, temos um detetor de partículas que pode ser localizado em diversas posições x. As partículas chegam uma de cada vez em C e se tivéssemos todo o painel coberto por detetores, observaríamos que para cada partícula haveria resposta de apenas um detetor (que pode ser uma célula foto-elétrica ou um contador Geiger). Não há meias respostas, o que indica que apenas é detetado uma partícula inteira por vez. Não há detecção de meias partículas e também não haverá respostas simultâneas

em dois detetores. Resumindo, o detetor na Fig. 1a) registra a chegada de apenas uma partícula corpuscular por vez, após a mesma percorrer a distância entre A e C, através das fendas em B. Naturalmente esta descrição acima é esquemática mas experiências equivalentes e cujos resultados ilustram as conclusões que apresentamos já foram realizadas<sup>[20]</sup>.

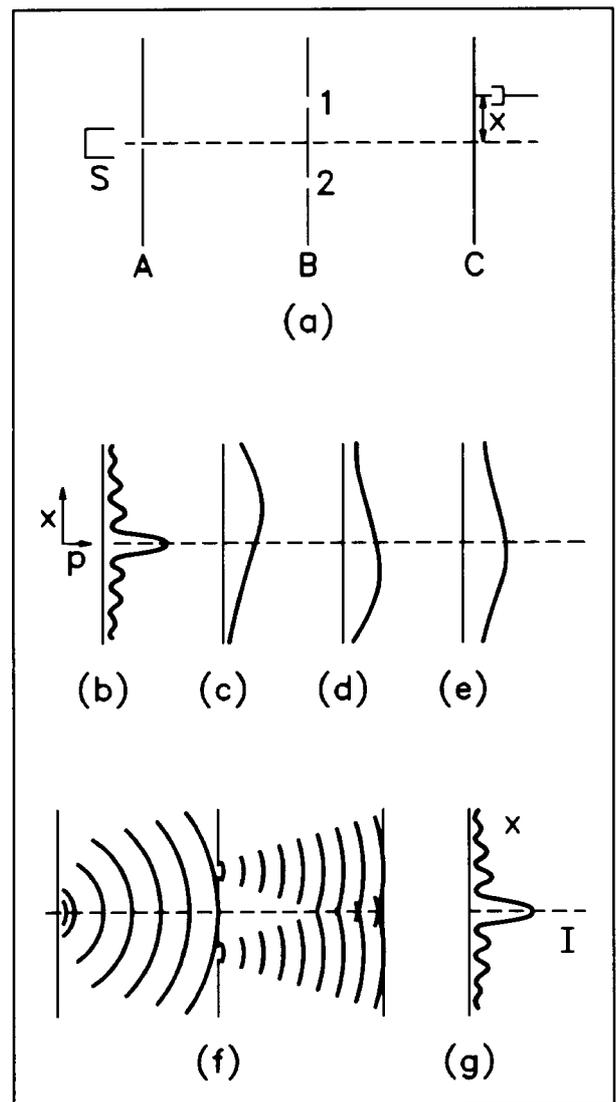


Figura 1. Difração de partículas na experiência de dupla fenda. a) Esquema da montagem. b) Resultado do experimento. c) Resultado com a fenda 1 aberta. d) Idem com a fenda 2 aberta. e) Idem com as duas fendas abertas. f) Experimento análogo com interferência de ondas. g) Curva da intensidade I das ondas que interferiram após passarem pelas duas fendas-semelhante à curva b) do número de partículas P.

Medimos para cada posição x do detetor o número de pulsos por segundo, o que nos fornece o número de partículas que saem da posição S e que chegam

na posição  $x$ . Obtemos assim o gráfico que fornece o número de partículas que chegam ao painel C em função da posição  $x$ , que é representado pela curva da Fig. 1b). Esta curva apresenta regiões com máximos, isto é, onde chegam muitas partículas e também regiões com mínimos, onde praticamente não há detecção de partículas. Para descobrir o mecanismo que governa esta distribuição complexa podemos supor o seguinte: cada partícula que vai de S até  $x$  deve passar ou pela fenda 1 ou pela fenda 2. Desta forma o número das que chegam em  $x$  deveria ser a soma de duas partes: o número daquelas que chegam pelo caminho através da fenda 1 mais o número de partículas que chegam pelo caminho através da fenda 2. Podemos verificar se esta hipótese é verdadeira mediante um experimento no qual fechamos um dos orifícios e deixamos o outro aberto. O resultado é a Fig. 1c) no caso da fenda aberta ser a fenda 1 e a curva da Fig. 1d) no caso da fenda aberta ser a de número 2. A soma destas duas curvas é a curva da Fig. 1e) que obviamente não reproduz a curva da Fig. 1b). A curva da Fig. 1b) é familiar e é idêntica à curva que se obtém efetuando uma experiência de interferência de ondas que encontram em seu caminho um obstáculo com duas fendas como está esquematizado na Fig. 1f). A curva que representa a amplitude de onda após a interferência, Fig. 1g), tem máximos que são as regiões em que as ondas interferem construtivamente e mínimos onde interferem destrutivamente. É nesta semelhança que podemos entender a maneira pela qual a MQ convencional é capaz de reproduzir fenômenos quânticos cujos resultados são de natureza tipicamente ondulatória: a partícula é representada por uma função de onda (que contém todas as informações sobre a partícula) que satisfaz a equação de Schrödinger. A solução desta equação fornece curvas típicas de interferência como a da Fig. 1b).

Este procedimento, entretanto, gera algumas dificuldades conceituais. Cada partícula é detetada individualmente. A curva da Fig. 1b) é o resultado obtido após um grande número de partículas haverem atingido o painel, uma após a outra. Para explicar as ‘aglomerações’ e as ‘rarefações’ resultantes temos duas opções: ou existe algum tipo de ‘comunicação’ entre as partículas para que, após cada impacto, haja alguma orientação para as partículas posteriores de forma a ‘construirmos’ uma curva do tipo da da Fig. 1b) ou, cada

partícula contém em si uma natureza ondulatória capaz de perceber a existência das duas fendas capacitando-a para gerar a configuração de interferência. Em todo caso, aquilo que se propaga de S até  $x$ , seja onda, seja partícula, deve necessariamente “saber” da existência das duas fendas o que implica na impossibilidade de caracterizarmos de maneira objetiva ‘aquilo que se propaga’. Entre S e  $x$  deve ocorrer alguma transmutação nas propriedades ‘daquilo que se propaga’: tem extensão para perceber a existência das fendas e é pontual em A e em  $x$  ! Por algum mecanismo a propriedade de extensão apenas é necessária quando mais de uma fenda está aberta. Por estas razões, a MQ convencional não explica, ou melhor, não toma conhecimento do que acontece entre a preparação do estado em A [ Fig. 1a)] e o resultado da medição em  $x$  sobre o painel C [Fig. 1b)]. Até os anos 80 foi fácil contornar esta questão. Experiências deste tipo apenas eram possíveis de serem realizadas com fluxos de partículas e a interpretação probabilística de Born<sup>[11]</sup> para a função de onda no caso de um fluxo (ensemble) redundava de certa forma em resultados estatísticos refletidos pela configuração de interferência resultante.

Veremos que segundo a TdBB existe uma explicação ontológica para a agregação das partículas na forma de configuração de interferência, devido à ação de uma força de natureza Quântica e que atua em cada partícula individualmente. Além do mais, veremos que segundo esta teoria é possível associar a cada partícula uma posição e um momento a cada instante, de forma que elas percorrem trajetórias bem definidas. A interpretação causal permite a análise desta experiência sem a necessidade apelar à ‘intuição Quântica’ sugerida por Bohr.

## II.2. Experiência da escolha posterior

É uma experiência que exemplifica os paradoxos que surgem na interpretação convencional da MQ quando se subdivide um fenômeno sem adotar um modelo consistente que especifica a posição e momento de uma partícula em cada instante. Este experimento foi sugerido por Wheeler em 1978<sup>[21]</sup> e foi executado independentemente por grupos na Universidade de Maryland e na Universidade de Munique. O experimento foi sugerido para fótons mas em princípio não há impedimentos

para efetuá-lo com eletrons.

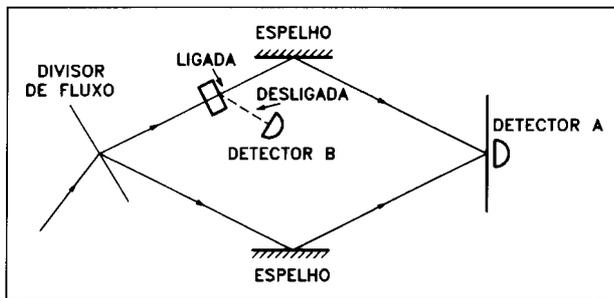


Figura 2. Experiência da escolha posterior.

Na Fig. 2 um fóton atinge um divisor de fluxo podendo desta forma atingir um painel provido de um detector A, percorrendo a trajetória superior ou inferior com a mesma probabilidade. Na trajetória superior é intercalado uma célula de Pockels que tem a propriedade de, quando ligada, desviar o fóton para um detector auxiliar B (por exemplo, um cristal que muda o índice de refração quando se aplica um campo elétrico). Quando a célula está desligada o fóton segue a trajetória normal.

Efetuando a experiência com a célula ligada o fóton será detetado em A ou em B, indicando que ele seguiu uma das trajetórias possíveis: ou a superior ou a inferior. Com a célula desligada, o detector A registra, após a repetição da experiência com um certo número de fótons, uma distribuição sobre o painel que segue um padrão de interferência. Até este ponto a experiência é similar à de interferência por duas fendas, descrito acima. Com a célula ligada o comportamento do fóton é de partícula (uma trajetória ou outra) e com a célula desligada o comportamento é de onda (duas trajetórias - figura de interferência).

Uma nova peculiaridade neste experimento surge com a possibilidade de ligar à célula um gerador de sinal aleatório, que apenas liga ou desliga a célula após o fóton tiver atravessado o divisor de fluxo, mas antes de atingir a célula. A detecção é correlacionada com o gerador de sinal e o que surpreende é que o resultado é o mesmo. Isto significa que o fóton apenas assume a característica de onda (dois caminhos para interferir) ou de partícula (apenas um caminho possível) no instante em que a célula é ligada ou desligada. Em outras palavras, o comportamento anterior (ao acionamento da célula) do fóton pode ser influenciado por um evento

posterior que (ligar ou desligar a célula imediatamente após o fóton tiver passado pelo divisor).

Sem dúvida nenhuma, a MQ convencional não consegue explicar o que sucede entre a preparação do estado e a sua medição. Esta situação foi dramatizada por Wheeler que destacou a possibilidade de aplicar este experimento à luz de quasares, que ao invés de passar pelo divisor de fluxo e espelhos da Fig. 2, passa por uma lente gravitacional formado por um objeto massivo como uma galáxia. Também neste caso a luz do quasar é dividida e é refocalizada para um observador distante que observa duas ou mais imagens do quasar devido à interferência. O fóton que teve dois caminhos à disposição no instante de sua criação pode ter um deles obstruído pelo próprio observador no momento de observação. Haverá a destruição da imagem de interferência e de alguma forma, já no momento de emissão (a éons de anos-luz) o fóton teve de se ‘decidir’ por um caminho ou por outro, pois caso contrário a imagem de interferência não seria destruída.

Veremos que segundo a teoria de Bohm esta conclusão é interpretada como uma evidência do emprego inapropriado de um modelo errado para interpretar um sistema físico individual (no caso o fóton).

### III. Paradoxo de Einstein, Podolsky e Rosen

Apesar de proporcionar contribuições que foram fundamentais para o desenvolvimento da MQ convencional, Einstein sempre teve reservas a seu respeito. Em seus comentários um dos temas que lhe despertavam maiores preocupações era a incompletude da descrição teórica da MQ, provida pela função de onda  $\psi$ . Em consequência, afirmava que a teoria Quântica, na forma em que se apresentava, estava limitada à mera discussão de resultados experimentais, e a percepção de que a essência da ciência é a predição e controle de fenômenos físicos e de que qualquer progresso em física irá se realizar através da manipulação de formalismos, ao invés do desenvolvimento da nossa concepção da realidade, foi se generalizando.

As críticas de Einstein eram elaboradas cuidadosamente. São famosas suas discussões com Bohr<sup>[22]</sup> e os debates que seguiram. Até os nossos dias muitas de suas críticas nunca foram respondidas satisfatoriamente.

A mais famosa delas críticas está contida na publicação de Einstein, Podolsky e Rosen em 1935<sup>[13]</sup>. Neste artigo analisam um “Gedankenexperiment” em

que uma partícula decaia em duas, e, mediante argumentos de conservação de momento e de energia, invocando o conceito de ‘colapso de onda’, concluem pela incompletude da função de onda que representa o estado quântico.

Bohm<sup>[15]</sup> adaptou o argumento EPR a um par de partícula de spin-1/2 que se encontram no estado  $|\Psi\rangle$ . Nesta forma de apresentar o argumento, as variáveis de spin evidenciam de maneira clara as conclusões, além de facilitarem a dedução da desigualdade de Bell que ve-

$$\Psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = f_1(\vec{x}_1)f_2(\vec{x}_2)\frac{1}{\sqrt{2}}[|+\rangle_1 |-\rangle_2 - |-\rangle_1 |+\rangle_2], \quad (1)$$

onde  $f_1(\vec{x}_1)$  e  $f_2(\vec{x}_2)$  são funções de pacote de onda que não se sobrepõem e  $|\pm\rangle_1$  ( $|\pm\rangle_2$ ) são auto-funções do operador spin  $\hat{S}_{\hat{n}_1}$  ( $\hat{S}_{\hat{n}_2}$ ) na direção  $\hat{n}$  pertinente à partícula 1 (2):

$$\begin{aligned} \hat{S}_{\hat{n}_1}|\pm\rangle_1 &= \pm\hbar/2|\pm\rangle_1, \\ \hat{S}_{\hat{n}_2}|\pm\rangle_2 &= \pm\hbar/2|\pm\rangle_2, \end{aligned} \quad (2)$$

O estado descrito pela equação (1) se refere ao sistema formado pelas partículas 1 e 2. Suponhamos que ao efetuar uma medida de spin na partícula 1, mediante um aparelho de Stern-Gerlach com o eixo na direção  $\hat{n}$ , obtemos o resultado de spin para cima (ao longo de  $\hat{n}$ ). Neste caso, de acordo com a teoria Quântica, a função

$$\Psi(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = f_1(\vec{x}_1)f_2(\vec{x}_2)\frac{1}{\sqrt{2}}[|+\rangle'_1 |-\rangle'_2 - |-\rangle'_1 |+\rangle'_2], \quad (4)$$

onde  $|\pm\rangle'_1$  e  $|\pm\rangle'_2$  são as autofunções dos operadores spin na direção  $\hat{n}'$ . Neste caso, se o resultado da medida da partícula 1 nesta nova direção  $\hat{n}'$  for para cima, então a função de onda total se reduz para

$$\Psi(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \rightarrow f_1(\vec{x}_1)f_2(\vec{x}_2)|+\rangle'_1 |-\rangle'_2. \quad (5)$$

Neste caso devemos atribuir o estado  $|-\rangle'_2$  para o átomo 2 que não foi medido. Efetuando diferentes medidas no átomo 1 estaremos obtendo estados diferentes para o átomo 2.

remos adiante. Além do mais vamos seguir o esquema apresentado por Greenberger et. al.<sup>[23]</sup> que sistematizam a análise das conclusões dentro de uma estrutura lógica de fácil compreensão.

Duas partículas de spin-1/2 são produzidas por uma fonte S (por exemplo o decaimento de uma molécula com spin total 1 e que decai em dois átomos de spin-1/2) e se movem livremente em direções opostas conforme está esquematizado na Fig. 3. A função de onda do sistema é dada por

de onda (1) se reduz (colapso da função de onda) ao primeiro somando:

$$\Psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \rightarrow f_1(\vec{x}_1)f_2(\vec{x}_2)|+\rangle_1 |-\rangle_2. \quad (3)$$

O resultado da medida é uma função de onda fatorizável o que nos permite concluir, sem que tenha havido perturbação da partícula 2, que o seu estado é  $|-\rangle_2$ . Este resultado para o sistema 2 depende do tipo de medida efetuada no sistema 1. Se tivéssemos efetuado a medida do spin do sistema 1 ao longo da direção, por exemplo,  $\hat{n}'$  (veja Fig. 3), o estado da equação (1) devido à simetria rotacional seria escrito como

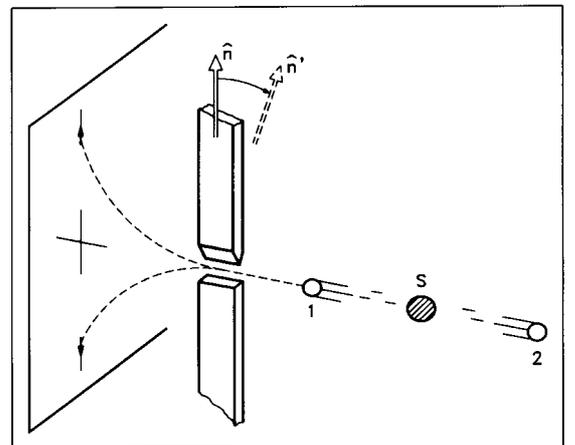


Figura 3. Medida Stern-Gerlach no paradoxo EPR versão de Bohm.

Feitas estas colocações e a fim de compreendermos o argumento EPR vamos definir as seguintes proposições:

- (i) correlação perfeita: se os spins das partículas 1 e 2 são medidos ao longo de uma direção o resultado das medidas serão opostos;
- (ii) localidade: se no instante da medida os sistemas não mais interagem, não podem ocorrer mudanças em um dos sistemas em virtude da medida realizada no outro;
- (iii) realidade: se for possível prever com certeza o valor de uma grandeza física, sem perturbar o sistema, então existe um elemento de realidade física que corresponde a esta quantidade física;
- (iv) completeza: todo elemento de realidade física deve ter uma contrapartida na teoria que descreve o fenômeno.

Utilizando as proposições de (i) a (iv), totalmente plausíveis, e em concordância com a lógica clássica, o argumento apresentado por EPR procede da seguinte maneira:

- \* devido a (i), correlação perfeita, podemos prever com certeza o resultado de medir qualquer componente do spin da partícula 2, escolhendo previamente a mesma componente de spin da partícula 1;
- \* devido a (ii), localidade, a medida efetuada em 1 não pode provocar mudanças em 2;
- \* devido a (iii), elemento de realidade física, a componente do spin escolhida para 2 é um elemento de realidade física, o que é válido para qualquer direção escolhida [veja equações (1) a (5)] donde todos as componentes de spin são elementos de realidade física.

O paradoxo: segundo a MQ não existe um estado quântico de uma partícula de spin-1/2 no qual todas as componentes de spin tem valores definidos. Devido (iv), completeza, a MQ não é uma teoria completa, pelo menos, para o caso do sistema com spin total igual a zero formado por um par de partículas spin-1/2. Para este sistema existem elementos de realidade física para a qual a MQ não tem contrapartida. Assim sendo a MQ é uma teoria incompleta e no artigo original<sup>[13]</sup> mencionam que “acreditam que uma teoria Quântica completa pode ser possível” com o que lançam o germe para o surgimento das diversas teorias de variáveis ocultas. Vale a pena mencionar que uma conclusão alternativa pode ser obtida renegando o conceito (ii) localidade. Neste caso, mesmo que os dois subsistemas não estejam mais interagindo, a medição efetuada em um deles ‘perturba-

ria’ instantaneamente o outro. A teoria Quântica seria completa mas estaria violando o princípio da relatividade segundo o qual não é possível enviar sinais com velocidade maior do que a da luz. E claro que Einstein preferiu se manter à localidade.

#### IV. Teorema de Bell

Em 1964 Bell<sup>[14]</sup>, utilizando as proposições (i) a (iv) de EPR juntamente com as predições da MQ, demonstra uma contradição, provando que o emprego das proposições de localidade, realidade e completeza teórica são incompatíveis com as predições da MQ. Bell equacionou esta contradição numa desigualdade, derivada do paradoxo apresentado por EPR (com argumentos válidos para a Física Clássica), que deve ser violada no caso da MQ ser válida. Esta desigualdade permite a verificação experimental e até o presente, todas elas confirmaram a validade da MQ<sup>[19]</sup>.

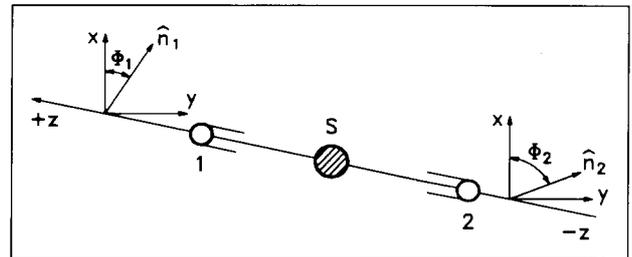


Figura 4. Experimento de Bohm. A fonte S emite um par de partículas spin-1/2, 1 e 2, no estado dado pela equação (1). Partícula i (i=1,2) entra no aparelho Stern-Gerlach orientado ao longo de  $\hat{n}_i$ . Atrás de cada um dos aparelhos estão dois detectores, omissos da figura, que registram o resultado ou é para cima, ou para baixo.

Para demonstrar o teorema de Bell retornamos ao “Gedankenexperiment” de Bohm<sup>[15]</sup> esquematizado na Fig. 4. A partícula 1 é sujeita a uma medida pelo aparelho Stern-Gerlach com campo magnético orientado ao longo de  $\hat{n}_1$ . O resultado da medida é indexado por +1 se a componente  $\hat{n}_1$ , do spin é para cima, e -1 se é para baixo. A partícula 2 é submetida a uma medida similar, com o campo magnético ao longo de  $\hat{n}_2$ . Assumindo que o sistema formado pelas duas partículas tem spin total zero, escrevemos a função de onda como sendo

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} [ | + >_1 | - >_2 - | - >_1 | + >_2 ] \quad (6)$$

onde  $|+\rangle_1$  e  $|-\rangle_1$  representam estados para cima e para baixo respectivamente, ao longo de uma direção  $\hat{n}$  para a partícula 1 e  $|+\rangle_2$  e  $|-\rangle_2$  com significado análogo para a partícula 2 com a mesma direção  $\hat{n}$ . Da equação (6) podemos obter<sup>[23]</sup> as probabilidades conjuntas:

$$P_{++}^{\Psi}(\hat{n}_1, \hat{n}_2) = \frac{1}{2} \text{sen}^2 \frac{\theta}{2}; \quad P_{+-}^{\Psi}(\hat{n}_1, \hat{n}_2) = \frac{1}{2} \text{sen}^2 \frac{\theta}{2};$$

$$E^{\Psi}(\hat{n}_1, \hat{n}_2) = P_{++}^{\Psi}(\hat{n}_1, \hat{n}_2) - P_{+-}^{\Psi}(\hat{n}_1, \hat{n}_2) - P_{-+}^{\Psi}(\hat{n}_1, \hat{n}_2) + P_{--}^{\Psi}(\hat{n}_1, \hat{n}_2), \quad (8)$$

cujos valores dependem do ângulo entre as direções  $\hat{n}_1$  e  $\hat{n}_2$ , resultando em

$$E(\hat{n}_1, \hat{n}_2) = -\cos\theta = -\hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2. \quad (9)$$

No caso especial em que  $\hat{n}_1 = \hat{n}_2$  temos correlação perfeita e o valor é -1. A equação (8) é o resultado quântico. Vejamos o que podemos inferir sobre o caso clássico.

Bell utiliza o argumento de EPR e introduz  $\lambda$  que representa um conjunto de variáveis que definem de maneira *completa* o estado das duas partículas, e que determinam o resultado das medidas de spin. O resultado da medida A ao medir o spin da partícula 1 é determinado exclusivamente pela direção de  $\hat{n}_1$  e  $\lambda$ , e o resultado B de medir ao longo de  $\hat{n}_2$ , exclusivamente por  $\hat{n}_2$  e  $\lambda$ , onde os versores  $\hat{n}_1$ , e  $\hat{n}_2$  formam o ângulo  $\theta$  com  $\hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2 = \cos\theta$ . Então

$$A = A(\lambda, \hat{n}_1) = \pm 1, \quad B = B(\lambda, \hat{n}_2) = \pm 1 \quad (10)$$

Probabilidades do tipo  $A = A(\lambda, \hat{n}_1, \hat{n}_2)$  e  $B = B(\lambda, \hat{n}_1, \hat{n}_2)$  são excluídas. Esta é a condição de localidade. A distribuição normalizada de probabilidades de variáveis ocultas depende exclusivamente de  $\lambda$ ,

$$\rho = \rho(\lambda) \quad (11)$$

e possibilidades do  $\rho = \rho(\lambda, \hat{n}_1, \hat{n}_2)$  são excluídas. A partir destes pressupostos o valor esperado do produto dos resultados A e B será dado por

$$E^{\rho}(\hat{a}, \hat{b}) - E^{\rho}(\hat{a}, \hat{c}) = - \int_{\Lambda} [A(\lambda, \hat{a})A(\lambda, \hat{b}) - A(\lambda, \hat{a})A(\lambda, \hat{c})] d\rho \quad (15)$$

e com pequena manipulação obtemos

$$E^{\rho}(\hat{a}, \hat{b}) - E^{\rho}(\hat{a}, \hat{c}) = \int_{\Lambda} [-A(\lambda, \hat{a})A(\lambda, \hat{b})][1 - A(\lambda, \hat{a})A(\lambda, \hat{c})] d\rho. \quad (16)$$

$$P_{++}(\hat{n}_1, \hat{n}_2) = \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}; \quad P_{+-}(\hat{n}_1, \hat{n}_2) = \frac{1}{2} \text{sen}^2 \frac{\theta}{2}, \quad (7)$$

onde o primeiro subscrito indica se o resultado da medida na partícula 1 é +1 ou -1, e o segundo subscrito é análogo para a partícula 2 e  $\hat{n}_1$  e  $\hat{n}_2$  são as direções ao longo das quais o spin é medido. Com estas probabilidades construímos o valor esperado do resultado das medidas, definido por

$$E^{\rho}(\hat{n}_1, \hat{n}_2) = \int_{\Lambda} A(\lambda, \hat{n}_1)B(\lambda, \hat{n}_2) d\rho, \quad (12)$$

onde  $\Lambda$  é o espaço dos estados completos  $\lambda$ .

Visto que o argumento de EPR partiu da premissa de correlações perfeitas que se observam na MQ [pressuposto (i)], é essencial que o valor esperado da equação (12) concorde com o valor da equação (9) quando  $\hat{n}_1 = \hat{n}_2 = \hat{n}$ :

$$E^{\rho}(\hat{n}, \hat{n}) = E^{\Psi}(\hat{n}, \hat{n}) = -1 \quad (13)$$

o que constitui um vínculo muito forte. Uma vez que o menor valor do produto de  $A(\lambda, \hat{n})B(\lambda, \hat{n})$  é -1 (o único outro valor possível é +1), a equação (13) apenas é satisfeita para um conjunto de valores de  $\lambda$  para os quais  $A(\lambda, \hat{n}) = -B(\lambda, \hat{n})$  tem probabilidade de medida +1, ou, segundo a notação introduzida acima, a menos que  $\rho(\lambda)$  seja igual a 1 para cada  $\hat{n}$ . Sendo  $A(\lambda, \hat{n}_1) \cdot B(\lambda, \hat{n}_2) = -1$  apenas quando  $\hat{n}_1 = \hat{n}_2 = \hat{n}$  teremos que  $A(\lambda, \hat{n}) = -B(\lambda, \hat{n})$  donde

$$E^{\rho}(\hat{n}_1, \hat{n}_2) = - \int_{\Lambda} A(\lambda, \hat{n}_1)A(\lambda, \hat{n}_2) d\rho. \quad (14)$$

Escolhendo três direções arbitrárias  $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ , podemos construir a seguinte igualdade

Para todos os  $\lambda$ , o produto  $-A(\lambda, \hat{a}) \cdot B(\lambda, \hat{b}) = +1$  ou  $-1$ , donde  $|A(\lambda, \hat{a})B(\lambda, \hat{b})| = 1$ , e  $1 - A(\lambda, \hat{b})A(\lambda, \hat{c}) \geq 0$ , o que nos permite escrever

$$|E^\rho(\hat{a}, \hat{b}) - E^\rho(\hat{a}, \hat{c})| \leq \int_{\Lambda} [1 - A(\lambda, \hat{b})A(\lambda, \hat{c})] d\rho = 1 + E^\rho(\hat{b}, \hat{c}), \quad (17)$$

da qual obtemos a desigualdade de Bell:

$$|E^\rho(\hat{a}, \hat{b}) - E^\rho(\hat{a}, \hat{c})| - E^\rho(\hat{b}, \hat{c}) - 1 \leq 0. \quad (18)$$

Para mostrar a discordância entre esta desigualdade com os resultados da MQ, expressos pela equação (9), obtemos, escolhendo para as direções de  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}$ , e de  $\hat{c}$  os ângulos azimutais de  $0$ ,  $\pi/3$  e  $2\pi/3$ , respectivamente, os seguintes resultados para o valor esperado (9):

$$E^\Psi(\hat{a}, \hat{b}) = -\frac{1}{2}, E^\Psi(\hat{b}, \hat{c}) = -\frac{1}{2}, E^\Psi(\hat{a}, \hat{c}) = +\frac{1}{2}, \quad (19)$$

donde a equação (18) para os valores quânticos (19) tem o valor de

$$|E^\Psi(\hat{a}, \hat{b}) - E^\Psi(\hat{a}, \hat{c})| - E^\Psi(\hat{b}, \hat{c}) - 1 = \frac{1}{2}, \quad (20)$$

em conflito direto com o valor da desigualdade dada pela equação (18). Não existe escolha, de acordo com as premissas (i) até (iv) do argumento EPR, para os  $\lambda$ , funções A e B, e para  $\rho$  que possam fornecer concordância com as predições da MQ dada pela equação (9). Mais adiante teceremos algumas considerações sobre o Teorema de Bell com o enfoque da TdBB.

## V. Teoria de de Broglie-Bohm

Em 1923 Louis de Broglie<sup>[8]</sup> propôs que a dualidade de onda-partícula seria uma propriedade geral dos objetos microscópicos. Em analogia à radiação eletromagnética, que, após os trabalhos de Planck, Einstein, e outros, apresentava, além das características ondulatórias, também propriedades inerentes às partículas, sugeriu que partículas microscópicas como elétrons e prótons além de se comportarem como partículas materiais (com posição e momento definido a cada instante), também apresentavam características próprias de fenômenos ondulatórios. Haveria assim um novo tipo de onda em coexistência com o ponto material. No caso não relativístico de Broglie sugeriu que a função de onda

$\Psi$ , que satisfaz a equação de Schrödinger, estaria associada a um ensemble de partículas idênticas com posições que se distribuem no espaço de acordo com a fórmula quântica  $|\Psi|^2$ . A função  $\Psi$  além de determinar as probabilidades das posições possíveis, também influenciaria as posições exercendo uma força sobre as trajetórias. A função de onda atuaria desta forma como um tipo de onda-piloto guiando as partículas para regiões do espaço em que  $\Psi$  é mais intenso.

Esta proposta foi apresentada por de Broglie no famoso Congresso de Solvay em 1927<sup>[24]</sup>, aplicando sua onda-piloto para computar as órbitas estacionárias dos elétrons no átomo de hidrogênio. Esta proposta encontrou forte oposição por maioria dos físicos presentes por acharem que seu método auferia poucas vantagens e também pelo fato do conceito de trajetória ter perdido seu significado na Teoria Quântica. Uma excessão às críticas foi Einstein que manifestou apoio à atitude de de Broglie em pesquisar na direção de incluir de maneira objetiva o conceito de partícula na MQ, embora não endossasse o modelo específico por ele apresentado. Outro fator que ofuscou o trabalho de de Broglie neste congresso foi a comunicação feita por Heisenberg da sua descoberta do Princípio da Incerteza.

De Broglie abandonou estes trabalhos e apenas voltou a pesquisar nesta área 25 anos depois, quando em 1952 Bohm<sup>[16]</sup> redescobriu esta hipótese e desenvolveu sobre ela uma nova teoria física.

O caráter estatístico da função de onda é comprovado experimentalmente. Por exemplo, ao efetuar a experiência de partículas que impingem sobre um painel B com duas fendas obtém-se sobre o painel C da Fig. 1a) uma curva com características de interferência. Esta curva pode ser construída por uma sequência de eventos aparentemente aleatórios, em que apenas uma partícula é emitida por vez pela fonte S. A função de onda prediz com precisão a posição mais provável em que cada uma delas irá atingir o painel C. A interpretação da função de onda pela MQ convencional, que lhe atribui uma na-

tureza exclusivamente estatística, apenas evidencia que ela contém alguma informação sobre as diversas probabilidades. Nenhum fato experimental exclui a possibilidade de que a função de onda tenha outras propriedades.

Na TdBB a função de onda passa a ter um significado físico de importância primária. A probabilidade e o significado estatístico apenas entram como uma propriedade secundária. Outro elemento que passa a ter importância primária é o conceito de partícula, concebido no sentido clássico como percorrendo uma trajetória contínua no espaço e no tempo.

Com estes conceitos os postulados básicos da teoria causal, ou melhor, da TdBB, são os seguintes:

- (i) Um sistema físico individual é formado por uma onda que se propaga no espaço e no tempo juntamente com uma partícula pontual que se move continuamente sob a influência desta onda;
- (ii) A onda é descrita matematicamente pela função  $\Psi(\vec{x}, t)$  que é uma solução da equação de onda de Schrödinger;
- (iii) O movimento da partícula é obtido pela solução  $\vec{x}(t)$  da equação

$$\dot{\vec{x}} = \frac{1}{m} \nabla S(\vec{x}, t) \Big|_{\vec{x}} = \vec{x}(t) \quad (21)$$

onde  $S$  é a fase de  $\Psi$ . A posição inicial  $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$  é a única informação adicional introduzida na teoria e que não está contida em  $\Psi(\vec{x}, t)$  ( $S$  determina a velocidade inicial). A variação de  $\vec{x}_0$  é que gera um ensemble de movimentos possíveis para a mesma onda;

(iv) A probabilidade de que uma partícula do ensemble esteja localizada entre os pontos  $\vec{x}$  e  $\vec{x} + d\vec{x}$  no instante  $t$  é dada por

$$R^2(\vec{x}, f) d^3x, \quad (22)$$

onde  $R^2 = |\Psi|^2$ . Este postulado seleciona entre todos os movimentos possíveis, implícitos pela equação (21), todos aqueles compatíveis com a distribuição inicial  $R^2(\vec{x}, 0) = R_0^2(\vec{x})$ . Este postulado é introduzido para assegurar que haja compatibilidade com os resultados da MQ.

Para melhor visualizar como o conceito de partícula entra na MQ, escrevemos a função de onda explicitando a fase e a amplitude:

$$\Psi = R \exp\left(\frac{i}{\hbar} S\right), \quad (23)$$

onde  $R = R(\vec{x}, f)$  e  $S = S(\vec{x}, f)$  são as funções da amplitude e da fase respectivamente. São funções reais do espaço e do tempo e  $\hbar = h/2\pi$ . A dimensão de  $S$  é de ação e é medida em unidades de  $\hbar$  e  $R$  tem dimensão  $L^{-3/2}$ . A função de onda é uma solução da equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\delta \Psi}{\delta t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + V(\vec{x}) \Psi, \quad (24)$$

onde  $m$  é a massa inercial e  $V = V(\vec{x}, t)$  é a energia potencial devido a um campo potencial clássico.

A introdução da equação de onda (24) sob a forma de postulado é equivalente à introdução das leis de Newton na Mecânica Clássica.

Substituindo (23) em (24) e separando as partes imaginária e real obtemos as seguintes equações para os campos  $R$  e  $S$ . A parte real fornece

$$\frac{\delta S}{\delta t} = -\frac{(\nabla S)^2}{2m} + V(\vec{x}) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R}, \quad (25)$$

e a parte imaginária pode ser colocada na forma

$$\frac{\delta R^2}{\delta t} + \nabla \cdot \left( \frac{R^2 \nabla S}{m} \right) = 0. \quad (26)$$

As equações (25) e (26) são um par de equações diferenciais a derivadas parciais nas quais os campos  $R$  e  $S$  determinam um ao outro. A função de onda  $\Psi$  é determinada a menos de uma constante. No caso de  $\Psi$  normalizada  $R$  é determinado de maneira única mas  $S$  é definida a menos de uma constante aditiva. A fim de que a teoria baseada nas equações (25) e (26) seja matematicamente equivalente à teoria baseada na equação de Schrödinger (24), é necessário traduzir as condições impostas sobre  $\Psi$ , que conferem significado físico a (24), em condições para  $R$  e  $S$ .

Para que (24) tenha uma solução única para todos os  $t$  é necessário especificar a função de onda inicial  $\Psi_0(\vec{x}) = \Psi(\vec{x}, 0)$  para todos os  $\vec{x}$ . De maneira equivalente é portanto necessário especificar as funções reais independentes

$$R_0(\vec{x}) = R(\vec{x}, 0), \quad S_0(\vec{x}) = S(\vec{x}, 0). \quad (27)$$

Estas funções são únicas a menos de uma constante multiplicativa e outra aditiva respectivamente, visto que todos os  $\Psi_0$ , que apenas diferem por estas constantes, são fisicamente equivalentes. Nos pontos em que

$\Psi_0 = 0$ ,  $S_0$  é indefinido, e as exigências de continuidade e de que  $\Psi$  e  $\nabla\Psi$  sejam finitos, também são estendidas às funções  $R$  e  $S$  e a suas derivadas. Na prática o procedimento é mais simples: ao invés de se estabelecer as condições para  $R$  e  $S$ , resolve-se o problema diretamente para  $\Psi$  e assumimos  $R \rightarrow 0$  no infinito, como veremos no parágrafo seguinte.

É oportuno destacar neste ponto algumas analogias com a Mecânica Clássica. Por exemplo, definindo

$$Q(\vec{x}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R}, \quad (28)$$

como sendo um potencial de origem Quântica podemos reescrever a equação (25) como

$$\frac{\delta S}{\delta t} = -\frac{(\nabla S)^2}{2m} + V(\vec{x}) + Q(\vec{x}), \quad (29)$$

que é a equação de Hamilton-Jacobi modificada. O potencial quântico apresenta características não locais, pois no caso de um sistema formado por duas partículas localizadas em  $\vec{x}_1$  e  $\vec{x}_2$ ,  $R^2 = \Psi^+ \Psi$ , com  $\Psi = \Psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t)$ .

O potencial quântico é análogo ao potencial  $V$  no que se refere ao movimento de uma partícula, o que é evidenciado após rearranjarmos a equação (25) juntamente com (28) que nos fornece

$$\left[ \frac{\delta}{\delta t} + \frac{1}{m} \nabla S \cdot \nabla \right] \nabla S = -\nabla(Q + V) \quad (30)$$

e identificando  $\nabla S/m$  com a velocidade da partícula obtemos

$$\frac{d}{dt}(m\dot{\vec{x}}) = -\nabla(Q + V) \Big|_{\vec{x}=\vec{x}(t)}, \quad (31)$$

onde

$$K_{\delta Y}^A(-X, 0, 0; x, Y + \eta, t_D) = \exp \left[ \frac{im}{2\hbar} \left( \frac{X^2 + (Y + \delta Y)^2}{T} \right) \right] \exp \left[ \frac{im}{2\hbar} \left( \frac{x^2 + (y + \eta - y + \text{deltay})^2}{\tau} \right) \right], \quad (33)$$

onde  $T = X/V_x$  e  $\tau = x/V_x$  e  $V_x$  é a componente da velocidade ao longo de  $x$ . A amplitude da probabilidade  $\Psi_A$  é obtida efetuando a integral sobre todas as posições de  $a$  dentro da fenda. Por conveniência assumimos que a fenda é Gaussiana<sup>[25]</sup> de maneira que a amplitude da probabilidade é dada pela integral

$$\Psi_A = F(T, \tau) \int_{-\infty}^{+\infty} K_{\delta Y}^A \exp \left[ -\frac{\delta Y^2}{2\beta^2} \right] d(\delta Y), \quad (34)$$

onde  $\beta$  é a meia largura da fenda Gaussiana. Obtemos

$$\frac{d}{dt} = \frac{\delta}{\delta t} + \dot{\vec{x}} \cdot \nabla, \quad (32)$$

representa a taxa de variação no tempo em relação a um ponto que se move com a partícula. A equação (31) tem a forma da 2a lei de Newton na qual a partícula está sujeita à força Quântica  $-\nabla Q$  além da força clássica  $-\nabla V$ . O potencial efetivo que atua sobre a partícula é portanto  $(Q + V)$ . Na prática podemos usar como lei do movimento indiferentemente as equações (21) ou (31), sendo que o uso da primeira é mais simples.

Uma aplicação espetacular da teoria que acabamos de apresentar é o estudo da interferência de partículas quando impingem sobre um painel com duas fendas, assunto a que nos dedicaremos a seguir.

## VI. Interferência de partículas na experiência de duas fendas

A descrição que segue é baseada no trabalho de Phlippidis, Dewdney e Hiley<sup>[18]</sup>. O esquema da montagem experimental está na Fig. 5 onde eletrons são emitidos por uma fonte  $S_1$ , passam por duas fendas A e B e chegam ao painel  $S_2$ . No sistema bidimensional de coordenadas  $xy$  com origem em O, os centros das fendas estão localizadas nos pontos  $(0, \pm Y)$ . A função de onda é computada pelo método da integral de caminho de Feynman<sup>[25]</sup> da qual podemos obter o potencial quântico. Para isto calculamos o propagador de uma partícula livre para uma trajetória que se inicia em  $S_1$  passa pelo ponto  $a$  dentro da fenda A à distancia  $\delta Y$  do seu centro, e termina no ponto D sobre o painel. As coordenadas de D são  $(x, Y + \eta)$  onde  $\eta$  é medido a partir do centro da fenda A. Neste caso o Kernel pode ser escrito como

$$\Psi_A = F(T, \tau) \exp \left[ \frac{im}{2\hbar} \left( \frac{X^2}{T} + \frac{x^2}{\tau} \right) \right] \exp \left[ \frac{im}{2\hbar} \left( \frac{Y^2}{T} + \frac{\eta^2}{\tau} \right) \right] \cdot \exp \left[ \frac{\frac{m^2}{2\hbar^2 \tau^2} (V_y \tau - \eta)^2}{\frac{im}{\hbar T} + \frac{im}{\hbar \tau} - i\beta^2} \right], \quad (35)$$

onde  $F(T, \tau)$  é um fator de normalização e  $V_y$  é a componente da velocidade na direção  $y$ . Para a amplitude de probabilidade  $\Psi_B$  das trajetórias que passam pela fenda B, obtém-se uma expressão similar.

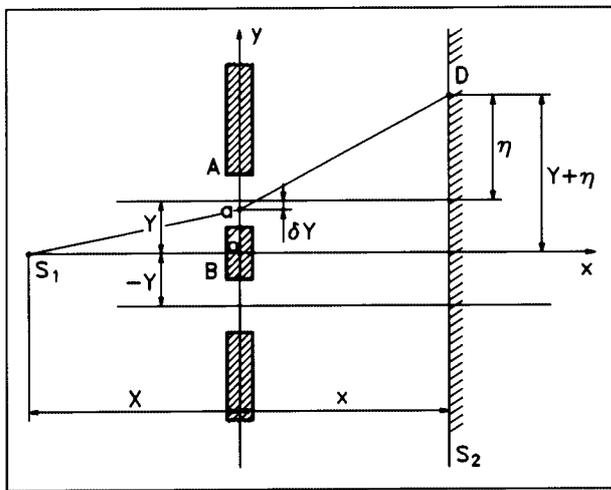


Figura 5. Elétrons da fonte S, passam por A e B e são detetados no painel  $S_2$ . Uma trajetória é mostrada para exemplificar o cálculo do propagador de Feynmann.

Estas soluções fornecem dois pacotes de onda imediatamente atrás das fendas, cada um se movimentando com a velocidade  $V_x$  na direção  $x$  e separando um do outro com uma velocidade relativa de  $2V_y$ .

Para obter uma visualização da forma do potencial quântico Phillippidis et al.<sup>[18]</sup> efetuaram um cálculo numérico utilizando para dados os valores utilizados nos experimentos de Jönson<sup>[26]</sup>. A energia dos elétrons é de 45 keV e a velocidade utilizada foi de  $V_x = 1.3 \cdot 10^8$  m/s e  $V_y = \pm 1.5 \cdot 10^2$  m/s. A separação entre os centros das duas fendas A e B é de  $1.0 \cdot 10^{-4}$  cm e sua meia largura é tomada como sendo igual a  $0.1 \cdot 10^{-4}$  cm. O potencial quântico foi calculado na região compreendida entre as fendas e o painel no domínio  $0 < x \leq 35$  cm e  $-1.9 \cdot 10^{-4}$  cm  $< y \leq 1.9 \cdot 10^{-4}$  cm.

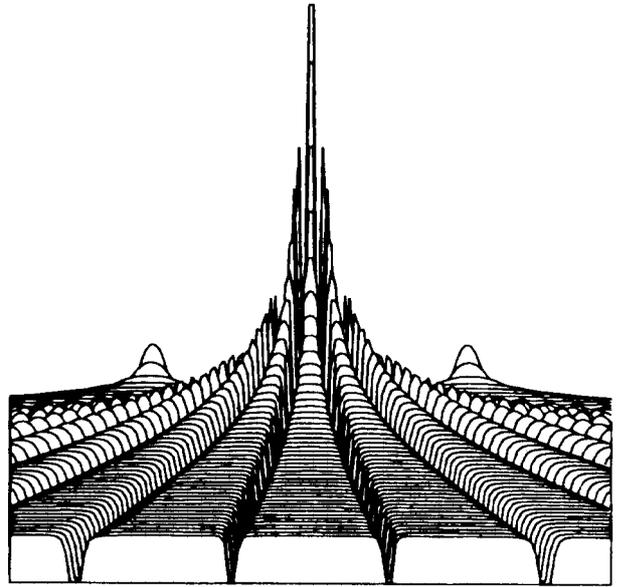


Figura 6. Potencial quântico para duas fendas Gaussianas vistas a partir do painel [18].

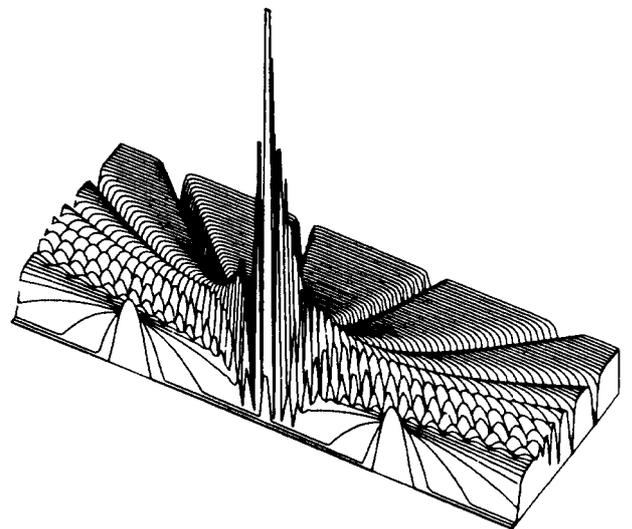


Figura 7. Potencial quântico. Vista azimutal de 150 [18].

A Fig. 6 mostra o potencial quântico quando visto do painel  $S_2$  olhando na direção das fendas. Na Fig. 7 temos o mesmo potencial em vista azimutal de 150° visto a partir das fendas na direção do painel. Os dois picos parabólicos localizados no plano das fendas são os potenciais quânticos que correspondem às fendas Gaussianas. A proporção que se afasta das fendas ao longo

do eixo dos  $x$ , à distância aproximada de 1.5 cm, surgem estruturas abruptas com muitos detalhes, mostrando que o valor de  $Q$  está associado mais com a variação de  $R$  do que com o seu valor absoluto, que no domínio entre as fendas é relativamente pequeno pois a sobreposição dos pacotes de onda é pequena. A cerca de 6 cm de distância das fendas esta estrutura decai e se desdobra numa série de platôs e vales. Na região de interesse  $Q$  é finito apenas divergindo quando  $y \rightarrow \pm\infty$ .

Uma trajetória que passa pelo ponto central da fenda B é mostrada na Fig. 8. As mudanças na direção da trajetória são devido à interferência entre o pacote de onda que contém o elétron que passa por uma das fendas com o pacote de onda vazia emanada pela outra (na TdBB o sistema eletrón é formado por uma onda que passa pelas duas fendas - um dos pacotes contém o eletrón - e pelo ponto material que passa por uma das fendas). A passagem de elevado número de elétrons forma no painel uma figura de interferência e para mostrar a maneira como ela se origina mostramos na Fig. 9 uma coleção de trajetórias calculadas a partir de uma distribuição inicial uniforme de posições. Inicialmente as trajetórias divergem de cada fenda em concordância com a difração Gaussiana, mas são repelidas da região central pelos picos acentuados do potencial quântico. As partículas se movimentam de maneira bastante uniforme com uma pequena componente de velocidade na direção  $y$  até encontrar um 'vale' de  $Q$ . Podemos ver uma secção transversal de um destes vales na Fig. 10, que descreve  $Q$  a cerca de 18 cm de distância das fendas. Quando a partícula entra em um dos vales ela sente uma força  $-\delta Q/\delta y$  inicialmente acelerando-a e depois desacelerando-a, até que ela emerge em outro platô onde a força novamente é fraca. A partícula não é aprisionada no vale devido à sua grande energia cinética ( $\sim 45$  keV) comparada à energia do potencial quântico (cujo valor máximo é da ordem de  $10^{-4}$  eV) na região considerada. É importante manter em mente as escalas para ordenada e absissa: para comparar movimentos na direção  $x$  com movimentos na direção  $y$  deve ser levado em conta um fator de  $\sim 10^4$  o que faz com que as variações nas trajetórias são muito suaves.

É importante salientar o papel fundamental desempenhado pelo conceito de força no tratamento causal. Na teoria usual não existe a ação de forças sobre partículas livres enquanto que na TdBB, mesmo

que não haja a ação de um potencial clássico  $V$ , existe o potencial quântico  $Q$  cujo gradiente atua como uma força.

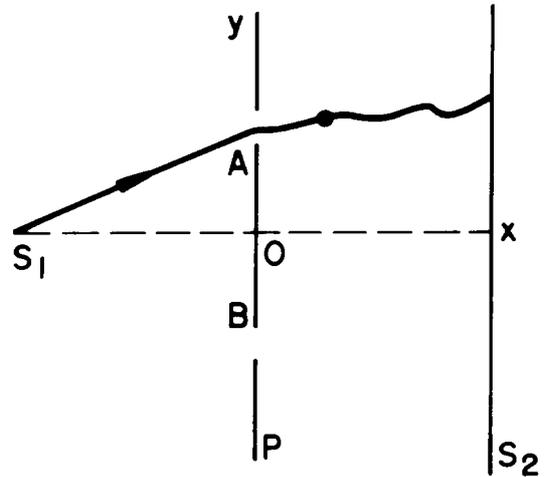


Figura 8. Trajetória de um elétron da fonte até o painel.

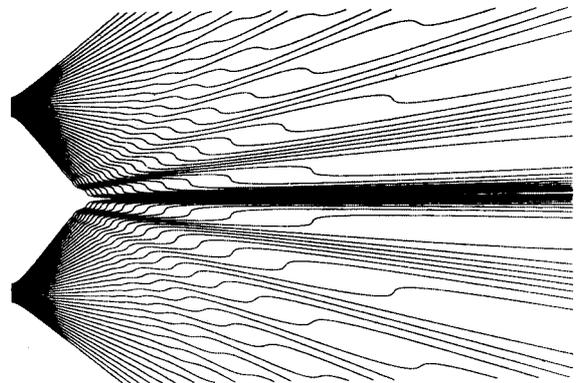


Figura 9. Conjunto de trajetórias possíveis de duas fendas Gaussianas, com uma distribuição de posições inicial uniforme em cada fenda [18].

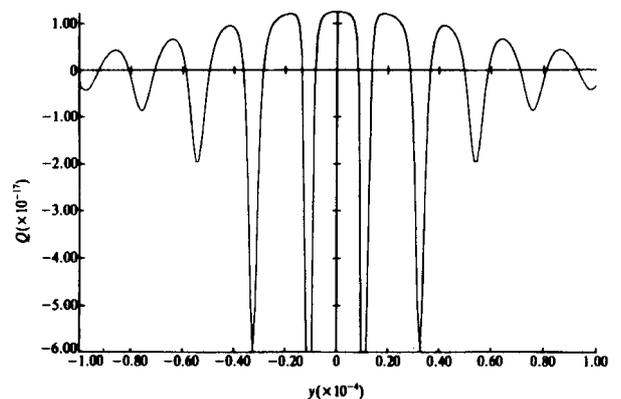


Figura 10. Secção transversal do potencial quântico a 18 cm das fendas [18].

## VII. Conclusões

ATdBB, contrariamente à MQ convencional, permite a visualização de eventos individuais como partes de sequências de processos conectados causalmente e que se realizam no espaço e no tempo. Isto é exemplificado de maneira espetacular na seção 2 onde são apresentados os resultados da teoria quando aplicada à experiência de interferência de partículas que passam por duas fendas.

A experiência da escolha posterior que nos induz a concluir que uma medida (ligar ou desligar a célula de Pockels) pode ter consequências em um instante anterior, isto é, no instante após o elétron passar pelo divisor de fluxo (célula ligada, um caminho ou célula desligada, dois caminhos) também fica esclarecido pela TdBB. O sistema fóton é formado por uma partícula, com posição e momento, e uma onda. A onda tem a propriedade de extensão espacial e se propaga pelo espaço ‘disponível’: um caminho ou dois, que são proporcionados pelo gerador de sinais antes do sistema fóton + partícula chegar à célula. Dependendo da célula estar aberta ou fechada haverá interferência ou não, tudo conforme o princípio da causalidade.

O paradoxo EPR, que conclui pela não-localidade na MQ, foi comprovado pela verificação experimental do Teorema de Bell. A MQ convencional não apresenta nenhuma contribuição para elucidar este aspecto que aparentemente está em contradição com a Teoria da Relatividade. A TdBB, através do potencial quântico  $Q$ , tem a não-localidade imbutida em seu formalismo, e, a análise do Paradoxo EPR, mostra de maneira clara a sequência causal do processo: o spin dos elétrons 1 e 2 apenas se manifestam à proporção que o elétron interage com o campo magnético do aparelho de Stern-Gerlach. O elétron 2 não interage com nenhum campo magnético e o seu spin é consequência do potencial quântico que correlaciona os dois elétrons. Este assunto será objeto de um trabalho posterior.

O Teorema de Bell formulado ao estabelecer a dependência de das funções  $A$  e  $B$  e da distribuição normalizada da probabilidade das variáveis ocultas  $\rho$ , levou em consideração o princípio da localidade ao escrever a dependência como sendo dada por  $A = A(\vec{a}, \lambda)$  e  $B = B(\vec{b}, \lambda)$  e  $\rho = \rho(\lambda)$ . Na TdBB devido ao potencial quântico possibilidades como  $A = A(\vec{a}, \vec{b}, \lambda)$ ,

$B = B(\vec{a}, \vec{b}, \lambda)$  e  $\rho = \rho(\lambda, \vec{a}, \vec{b})$  não estão excluídas e em certos casos, como no caso do estado singlete que representa os dois elétrons, a não-localidade é uma possibilidade, e o Teorema de Bell é violado.

Em resumo, a TdBB admite a não-localidade. Talvez seja este o fato que mais tem provocado a resistência da comunidade científica em aceitar a mesma. Entretanto, constatamos que a visão positivista proposta por Bohr isto é, a MQ convencional, apesar de se aferrar ao princípio da localidade incorre em conclusões bem mais perturbadoras do que a não-localidade. Além do mais, a TdBB sendo uma teoria causal baseada em paradigmas clássicos é a única teoria disponível para o estudo de fenômenos que a MQ convencional simplesmente ignora, como por exemplo, experimentos que envolvem o tempo de tunelamento de partículas.

Também é importante ressaltar que a TdBB evidencia sem nenhuma dúvida o limite para a transição clássica. A MQ convencional adota de maneira genérica como sendo quando  $h \rightarrow 0$  o que não é satisfatório em muitos casos. Na TdBB, o limite fica bem determinado na equação (31) com  $Q \rightarrow 0$ .

Para finalizar, tomamos a liberdade em parafrasear uma manifestação de Bopp que de certa maneira reflete a postura da comunidade em relação ao trabalho de Bohm. Em 1957, ao resumir as discussões que se travaram em uma das seções de um congresso em Bristol, na qual a TdBB foi fortemente criticada, Bopp assim se expressou: "...afirmamos que a teoria de Bohm não pode ser refutada, entretanto, acrescentamos que não lhe damos crédito". É do nosso parecer que esta postura intransigente está lenta mas inexoravelmente cedendo frente aos resultados experimentais que estão se sucedendo.

## Referências

1. M. Planck, Ver. der Deutsch Phys. Gesell. **2**, 202 (1900); Ann. der Phys. (4) **4**, 553, (1901).
2. A. Einstein, Ann. der Phys. (4) **17**, 132 (1905).
3. E. Rutherford, Phil Mag, **21**, 669 (1911).
4. N. Bohr, Phil. Mag, **26**, 1, 1913; Nature, **92**, 231 (1913).
5. Jammer, M., *The Conceptual Development of Quantum Mechanics*, McGraw-Hill, 1966, Capítulo 3.

6. W. Heisenberg, *Z. Physik* **33**, 879 (1925).
7. E. Schrödinger, *Ann. Physik* (4)**79**, 361 e 489 (1925); **80**, 437 (1926); **81**, 109 (1926).
8. L. de Broglie, *Nature* **112**, 540 (1923), Thesis, Paris, 1924, *Ann. de Physique* (**10**), 2 (1925).
9. E. Schrödinger, *Ann. Physik* (4) **79**, 734 (1926).
10. J. von Neumann, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton: University Press (1955).
11. M. Born, *Zeitschrift für Physik*, **37**, 863 (1926); **38**, 803 (1926)
12. J. A. Wheeler, and W. H. Zurek, ed., *Quantum theory and Measurement*. Princeton: University Press (1983), Capítulo I, p 182.
13. A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, *Phys. Rev.*, **47**, 777 (1935).
14. J. S. Bell, *Physics* **1**, 195 (1964).
15. D. Bohm, in *Quantum Theory*. New York: Prentice Hall (1951).
16. D. Bohm, *Phys. Rev.* **85**, 166 (1952); **85**, 180 (1952).
17. L. Rosenfeld, *Nature*, **181**, 658 (1958).
18. C. Phillippidis, C. Dewdney, and B. J. Hiley, *Il Nuovo Cimento* **52B**, 15 (1979).
19. A. Aspect, P. Grangier, and G. Roger, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 91 (1982); **49**, 1804 (1982).
20. V. B. Braginsky and F. YA. Khalili, em *Quantum Measurement*, ed by Kip Thorne, Cambridge University Press, 1992.
21. J. A. Wheeler, in *Mathematical Foundations of Quantum Theory*, ed. AR. Marlow, pp 9-48. New York: Academic Press (1978).
22. Referência [12] Capítulo I, p. 9.
23. D. M. Greenberger, M. A. Horne, A. Shimony, A. Zeilinger, *Am. J. Phys.* **58**, 1131 (1990).
24. L. de Broglie, *Electrons et Phonons, Rapport au Ve Conseil Physique Solvay*, Gauthier Villiards, Paris, 1930.
25. R. P. Feynman and A. R. Hibbs, in *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill, 1965.
26. C. Jonson, *Zeit Phys* **161**, 454 (1961).
27. M. Jammer, in *The Philosophy of Quantum Mechanics*, John Wiley & Sons, New York (1974), p 296.