

Notas e Discussões

A computação numérica como ferramenta para o professor de Física do Ensino Médio

(*The numerical computation as a tool for high school Physics teacher*)

Augusto César de Castro Barbosa¹, Cláudio Gonçalves Carvalhaes¹
e Marcus Vinicius Tovar Costa²

¹*Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil*

²*Instituto de Aplicação, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil*

Recebido em 29/9/2005; Revisado em 2/3/2006; Aceito em 4/4/2006

A proposta deste trabalho é apresentar ao professor de Física do ensino médio uma forma de empregar recursos computacionais para esclarecer e aprofundar conceitos de Física que são explorados de forma limitada por não se poder recorrer ao Cálculo Diferencial e Integral. O pêndulo simples é usado como protótipo para o tratamento sugerido. Mostramos que apenas com o auxílio de uma planilha eletrônica – sem a necessidade, portanto, de conhecimentos avançados de computação – é possível criar um ambiente para o aluno testar o processo de convergência numérica e obter informações do comportamento do sistema a partir de análises gráficas.

Palavras-chave: pêndulo simples, diferenças finitas, planilha eletrônica.

The proposal of this work is to present a way to explore computational tools to clarify concepts in the high school Physics classes that are briefly explored since it is not possible to use differential and integral calculus methods. The simple pendulum is used as a prototype to the suggested treatment. We show that with only the use of a spreadsheet – without requiring advanced computation knowledge – it is possible to create an environment to the student to test the numerical convergence processes and to obtain information about the behavior of the system based on graphical analysis.

Keywords: simple pendulum, finite differences, spreadsheet.

1. Introdução

Uma preocupação do professor de Física do Ensino Médio, em geral, é que no trabalho a ser desenvolvido se busque o entendimento dos fenômenos estudados através da construção de modelos. No entanto, estes levam muitas vezes à uma descrição física complexa. Além disso, uma outra fonte de dificuldade, é que o tratamento matemático necessário para a elaboração de um modelo satisfatório pode estar assentado em um grau de sofisticação muito além daquele usualmente tratado no Ensino Médio [1]. Isto ocorre, por exemplo, no estudo do pêndulo simples, em que o emprego da segunda lei de Newton conduz naturalmente à uma equação diferencial.

A beleza na formulação de um modelo está na busca dos ingredientes fundamentais que, segundo nosso entendimento, devem estar presentes na descrição adequada do fenômeno físico que se deseja estudar [2]. Dessa forma, podemos elaborar duas perguntas: Quais são estes tais ingredientes? Como saber quais são os

mais importantes? Em muitos casos, o confronto entre o modelo proposto e a experimentação é a melhor maneira de se proceder. Esta busca na elaboração de um modelo para a descrição de um dado fenômeno não deve deixar de incluir características como “simplicidade”, precisão e poder de previsão [3].

Em geral, o conteúdo de Física apresentado no Ensino Médio passa por uma simplificação que, mesmo limitando as aplicabilidades dos modelos estudados, oferece ao aluno um conjunto de possibilidades que deve ser adequadamente exposto e explorado pelo professor. Nesse sentido, a prática laboratorial ganha uma enorme importância, na medida em que essas práticas possibilitam o aluno perceber com maior clareza os limites dos modelos envolvidos e suas simplificações na descrição dos fenômenos, além de proporcionar a construção dos conceitos básicos.

O computador é um elemento que vem se tornando um poderoso instrumento facilitador no processo ensino/aprendizagem nos últimos anos, principalmente na área científica [1, 4, 5]. Os recursos computacionais

¹E-mail: accb@ime.uerj.br.

têm sido incorporados com sucesso tanto nas práticas de laboratório, como nas demais atividades desenvolvidas em sala de aula [6]. O computador desempenha cada vez mais ativamente um papel de destaque no ensino básico de ciências, principalmente na abordagem de sistemas que apresentam um alto grau de complexidade [7].

Neste trabalho, apresentamos uma forma de se empregar o computador para estudar sistemas físicos que são discutidos de forma restrita no Ensino Médio, devido às estruturas matemáticas envolvidas. Como exemplo, utilizamos o pêndulo simples [8]. Nossa proposta envolverá noções de matemática finita, que podem ser apresentadas com facilidade ao aluno. Quanto ao tratamento computacional, será necessário usar apenas um programa de planilha eletrônica, que faz parte dos pacotes básicos instalados na maioria dos computadores.

2. O pêndulo simples

O pêndulo simples é um dos sistemas protótipos no estudo de oscilações mecânicas, tanto na universidade quanto no Ensino Médio. Além de ter um caráter didático de grande valor, o pêndulo simples é também um ótimo exemplo para se ilustrar os métodos da Física experimental. Isto pode ser observado na estimativa do valor da aceleração da gravidade que pode ser feita facilmente no laboratório didático.

O pêndulo simples é um sistema constituído por uma partícula de massa m suspensa por meio de um fio inextensível de comprimento L e de massa desprezível, como mostra a Fig. 1 [9, 10, 11, 12, 13].

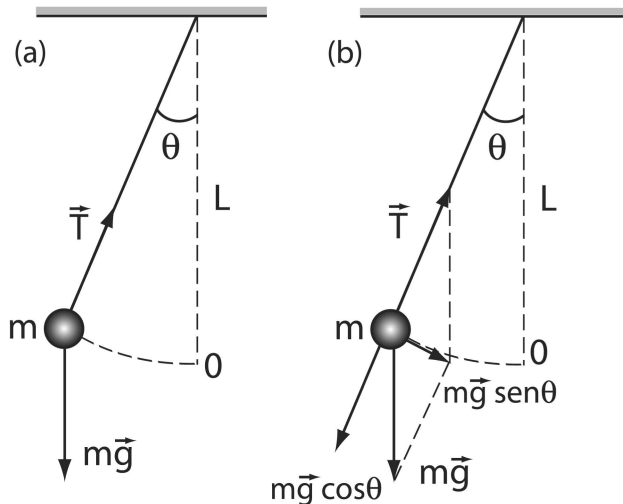


Figura 1 - (a) Representação do pêndulo simples, no instante inicial, e das forças que agem na partícula de massa m . (b) Em destaque as componentes radial e tangencial da força peso à trajetória.

A partícula é afastada de sua posição de equilíbrio (ponto O), de maneira que o fio forme um ângulo θ com a vertical, e é então abandonada desta posição. Vamos

considerar que a resistência do ar e os efeitos de atrito na articulação entre o fio e o suporte sejam desprezíveis. Neste problema, a inércia é representada pela massa da partícula e a força restauradora é a força gravitacional entre a Terra e a partícula.

As forças que atuam sobre a partícula são o seu peso e a tensão na corda (Fig. 1a). Decompondo-se a força peso em seus componentes radial e tangencial à trajetória (Fig. 1b), a segunda lei de Newton aplicada a este sistema nos fornece:

$$\begin{cases} mg \cos \theta - T = ma_r \\ -mg \sin \theta = ma_\theta \end{cases}, \quad (1)$$

onde a_r e a_θ são as acelerações radial e tangencial, respectivamente, T representa a tensão no fio e $g = |\mathbf{g}|$ é a aceleração da gravidade. Neste sistema, não existe variação de velocidade na direção radial, logo a componente da aceleração é nula. A componente tangencial é definida por:

$$a_\theta = \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2(L\theta)}{dt^2} = L \frac{d^2 \theta}{dt^2}, \quad (2)$$

onde $x = L\theta$ representa o deslocamento da partícula ao longo do arco. Dessa forma, o sistema de equações toma a forma:

$$\begin{cases} mg \cos \theta - T = 0 \\ -mg \sin \theta = mL \frac{d^2 \theta}{dt^2} \end{cases}. \quad (3)$$

Reescrevemos a segunda equação como:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0. \quad (4)$$

Neste ponto, em geral, nos livros textos, procura-se calcular a frequência natural de oscilação, supondo que θ seja muito pequeno ($\theta \ll 1$). Apresentamos, no apêndice, algumas considerações sobre o movimento do pêndulo para um ângulo qualquer. Dentro dessa aproximação, a Eq. (4) fica:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \theta = 0. \quad (5)$$

Esta é uma equação diferencial linear homogênea de segunda ordem, cuja solução geral é:

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega t + \phi), \quad (6)$$

onde θ_0 representa a amplitude máxima de oscilação; a frequência angular ω e o período de oscilação P , independente da massa do pêndulo, são dados por:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad e \quad P = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}. \quad (7)$$

Um ponto importante é que o período de oscilação também independe da amplitude θ_0 , o que é uma consequência da aproximação $\sin \theta \approx \theta$. Para uma melhor compreensão do erro introduzido por esta aproximação,

veja o apêndice. Vale mencionar que os livros textos, tanto no Ensino Médio, como no ensino superior, analisam o problema do pêndulo simples a partir dessa aproximação, procurando fazer uma analogia com o problema da mola, deduzindo a Eq. (7) da Lei de Hooke, fazendo:

$$k = \frac{mg}{L} \quad e \quad P = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (8)$$

3. Tratamento computacional

Em diversas áreas da Física os pesquisadores recorrem com frequência às técnicas de análise numérica quando os problemas matemáticos enfrentados exigem um tratamento analítico intrincado, ou mesmo não permitem um tratamento puramente analítico. De fato, nos anos recentes, nenhuma área da matemática cresceu mais em importância para a Física do que a análise numérica. À medida que os computadores são aperfeiçoados, essa importância aumenta, e aumenta também a rapidez com que a própria análise numérica se desenvolve.

Há anos os métodos numéricos fazem parte do currículo de graduação dos cursos da área tecnológica, onde, normalmente, são oferecidas disciplinas que abordam métodos clássicos para se resolver problemas de Cálculo numericamente.

Nas disciplinas de Cálculo Numérico [14], invariavelmente, o professor apresenta aos alunos métodos para se resolver numericamente integrais e equações diferenciais. Em certos casos, no entanto, é possível se adotar a formulação numérica como via principal para descrever a dinâmica do sistema. Em outras palavras, ao invés de tomar o caminho de descrever a dinâmica analiticamente e, se preciso, resolver as equações resultantes numericamente, às vezes é possível se tratar o problema desde o início empregando-se estruturas numéricas. Esse tratamento evita as equações diferenciais, que são impróprias para o Ensino Médio.

O primeiro passo é considerar que a evolução temporal das variáveis do sistema se dá em intervalos discretos de tempo. Isto significa transformar a variável temporal contínua $t \in [0, \infty)$ em uma variável discreta $t_i = 0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots$, onde cada t_i difere de seus vizinhos mais próximos por um valor fixo Δt ,

$$\Delta t = t_i - t_{i-1}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (9)$$

Esse valor fixo de variação temporal é chamado de passo temporal ou simplesmente passo.

Com o tempo discreto, as demais grandezas dinâmicas também se transformam em variáveis discretas. Por exemplo, a função posição $\theta(t)$ passa a ser escrita como θ_i , sendo θ_0 a posição no instante t_0 , θ_1 a posição no instante t_1 , e assim por diante. O mesmo ocorre com as variáveis que medem taxas de variação instantâneas, como velocidade e aceleração, como veremos a seguir.

Na formulação contínua, num instante t' qualquer, as derivadas primeira $\frac{d\theta}{dt}$ (velocidade instantânea, v_θ) e segunda $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ (aceleração instantânea, a_θ) são definidas por:

$$\frac{d\theta}{dt}(t') = \lim_{t \rightarrow t'} \frac{\theta(t) - \theta(t')}{t - t'}, \quad (10)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}(t') = \lim_{t \rightarrow t'} \frac{\frac{d\theta}{dt}(t) - \frac{d\theta}{dt}(t')}{t - t'}. \quad (11)$$

Essas variáveis podem ser transformadas de forma simples em grandezas discretas, tomando-as como valores médios de θ e v_θ , calculados em intervalos de tempo bastante pequenos (e finitos). Essa forma de definir derivadas é conhecida como Método das Diferenças Finitas (MDF).

Denotando, por conveniência, as derivadas primeira e segunda de θ por $\dot{\theta}$ e $\ddot{\theta}$, respectivamente, definimos:

$$\dot{\theta}_i = \frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{\Delta t}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (12)$$

e

$$\ddot{\theta}_i = \frac{\dot{\theta}_i - \dot{\theta}_{i-1}}{\Delta t} = \frac{\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{\Delta t} - \frac{\theta_{i-1} - \theta_{i-2}}{\Delta t}}{\Delta t} = \frac{\theta_i - 2\theta_{i-1} + \theta_{i-2}}{(\Delta t)^2}, \quad i = 2, 3, 4, \dots \quad (13)$$

As definições (12) e (13) podem ser interpretadas como uma aproximação discreta das derivadas contínuas em (10) e (11), em que os seus limites são suprimidos e Δt é muito pequeno. Vale observar aqui que o professor deve utilizar, na apresentação da teoria, a notação padrão adotada nos livros didáticos. Por exemplo, onde encontramos $\ddot{\theta}$, podemos substituir por α - aceleração angular.

Vamos agora ao problema do pêndulo simples. Seguindo os mesmos passos empregados para se chegar à formulação diferencial da equação do pêndulo linear (Eq. (5)), mas tomando a velocidade instantânea $\dot{\theta}$ como em (12) e a aceleração $\ddot{\theta}$ como em (13), obtemos que a dinâmica do pêndulo simples linear é descrita por:

$$\frac{\theta_i - 2\theta_{i-1} + \theta_{i-2}}{(\Delta t)^2} + \omega^2\theta_i = 0, \quad i = 2, 3, 4, \dots \quad (14)$$

Essa é a formulação discreta da equação do pêndulo, obtida via MDF. A Eq. (14) desempenha o mesmo papel que a Eq. (5) desempenhava na formulação contínua. A vantagem é que a Eq. (14) é resolvida para θ sem a necessidade de se aplicar conhecimentos matemáticos avançados. Dessa forma, obtemos então:

$$\theta_i = \frac{1}{1 + (\omega\Delta t)^2} (2\theta_{i-1} - \theta_{i-2}), \quad i = 2, 3, 4, \dots \quad (15)$$

A relação (15) fornece, recursivamente, os valores de θ_i em termos de seus valores nos tempos imediatamente anteriores t_{i-1} e t_{i-2} . O valor θ_0 corresponde à

amplitude inicial do pêndulo. Se Δt é suficientemente pequeno, θ_1 deve ser tomado próximo de θ_0 , pois não esperamos variações significativas para θ num intervalo de tempo pequeno.

Um programa de computador como o OpenOffice ou o Excel é suficiente para se implementar e iterar facilmente a relação (15), obter uma tabela de valores de θ_i e o gráfico $\theta \times t$. Como ilustração, apresentamos a seguir algumas curvas $\theta \times t$ obtidas dessa forma. Para avaliar o resultado da formulação discreta, apresentamos no mesmo par de eixos, o gráfico da solução da formulação contínua fornecida pela relação (6).

A Fig. 2 mostra duas soluções da relação (15) com passos temporais distintos. Na primeira, $\Delta t = 0,03$ s e na segunda, $\Delta t = 0,06$ s. O eixo vertical representa a amplitude de oscilação em radianos e o horizontal o tempo em segundos. As condições iniciais são $\theta_0 = 0,1$ rad e $\theta_1 = 0,1$ rad, correspondendo a uma velocidade inicial nula (relação (12)).

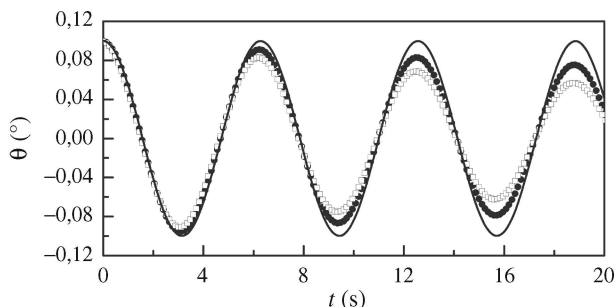


Figura 2 - Dependência temporal da amplitude de oscilação do pêndulo com amplitude inicial de 0,1 rad e frequência angular de 1 rad/s. A linha cheia corresponde à solução analítica, a curva representada por círculos cheios corresponde à solução numérica com o passo de 0,03 e a curva representada por quadrados vazios ao passo de 0,06.

Observa-se no gráfico que já no final do primeiro meio ciclo as soluções numéricas analítica são bastante diferentes. Essas diferenças se ampliam à medida que o número de ciclos observados aumenta. Em outras palavras, as soluções numéricas divergem de forma crescente da solução analítica, tanto para $\Delta t = 0,03$ s quanto para $\Delta t = 0,06$ s, sendo mais acentuado para o Δt maior. Essa discrepância indica que o tratamento numérico é impreciso. É possível melhorar a precisão empregando-se passos temporais que tornem as três curvas indistinguíveis.

Tomando-se valores cada vez menores para Δt como, por exemplo, 0,02, 0,01, pode-se verificar que as curvas referentes a esses valores se aproximam cada vez mais do resultado analítico. Isto evidencia a melhora da precisão numérica. Construindo o gráfico, o leitor constatará que por vários ciclos não haverá diferenças apreciáveis entre as duas formulações. Isto ilustra o papel crítico que a escolha do passo exerce na formulação numérica. Com passos suficientemente pequenos, os valores médios podem ser boas aproximações para as taxas instantâneas.

Vale salientar que há casos em que a não linearidade das equações diferenciais gera instabilidades numéricas que impedem a convergência do MDF, mesmo com passos temporais pequenos. Nesta situação, métodos numéricos mais elaborados ou outras versões do MDF precisam ser considerados.

A planilha eletrônica Excel foi empregada para gerar os gráficos $\theta \times t$. A planilha Excel ou seu equivalente OpenOffice é um instrumento computacional de fácil aprendizado, onde os cálculos numéricos podem ser executados sem a necessidade de se aprender uma linguagem de programação. Apesar do Excel não ser um software livre, optamos por empregá-lo por ser mais comum encontrá-lo nas escolas do que o OpenOffice.

Os Quadros 1 e 2 abaixo mostram os comandos do Excel que geram o traçado gráfico da relação (15). A célula B_1 armazena o valor de ω (fixo) e a célula B_2 o de Δt (também fixo). As colunas C a F irão armazenar os valores de t e da variável angular, nos tempos $i - 2, i - 1$ e i . Após o preenchimento das células, como mostradas nos Quadros, deve-se selecionar as células no intervalo $C3$ a $F3$, clicando nas células $C3$ e $F3$ com a tecla [Shift] pressionada. Após este procedimento deve-se clicar e arrastar a alça de preenchimento da seleção (quadrado escuro no canto direito inferior da célula $F3$) para estender o cálculo para diversas linhas.

	A	B	C	D	E	F
1	Omega	1	tempo	X(i-2)	X(i-1)	X(i)
2	Delta t	0,06	0	0,1	0,1	= $(2 * E2 - D2) / (1 + (\$B\$1 * \$B\$2)^2)$
3			=C2+\$B\$2	=E2	=F2	= $(2 * E3 - D3) / (1 + (\$B\$1 * \$B\$2)^2)$

Figura 3 - Comandos do Excel que fornecem o gráfico da Fig. 2.

	A	B	C	D	E	F
1	Omega	1	tempo	X(i-2)	X(i-1)	X(i)
2	Delta t	0,06	0	0,1	0,1	0,099641291
3			0,06	0,1	0,09964129	0,098926447

Figura 4 - Resultado do cálculo indicado na Fig. 4.

4. Considerações finais

Procuramos mostrar que é possível se empregar o computador para aprofundar o estudo de Física no Ensino Médio, em problemas nos quais o conhecimento de Cálculo Diferencial e Integral é exigido. Esse tratamento propicia ao aluno a possibilidade de estudar um conjunto maior de problemas físicos, como também o introduz, de forma intuitiva, às idéias do Cálculo Numérico e do Cálculo Diferencial e Integral.

Apesar da utilização crescente de computadores como elemento no fornecimento de informações e também como agente auxiliar na construção do conhecimento, existe ainda uma grande resistência dos professores e alunos em utilizá-lo como ferramenta para o desenvolvimento e aprendizagem na área científica. Essa resistência na maioria dos casos se dá em função do desconhecimento de linguagens de computação. A discussão que apresentamos tenta vencer essa resistência,

mostrando como se pode usar o computador para resolver um problema importante em Física (o pêndulo simples), sem a necessidade de tais conhecimentos.

Foi mostrado que a determinação do passo temporal adequado à formulação numérica é um exercício de repetição de uma rotina computacional. No entanto, com o devido cuidado, esse exercício pode ser aproveitado para levar o aluno a refletir melhor sobre a diferença entre grandezas médias e instantâneas, preparando-o para no futuro compreender adequadamente o conceito de derivada.

Por fim, queremos ressaltar a importância das atividades laboratoriais para o aluno, já que a Física é uma ciência com profundo caráter experimental. O computador e outras tecnologias são ferramentas auxiliares importantes no processo de ensino/aprendizagem mas, no entanto, não substituem as realizações experimentais.

Apêndice: Movimento para um ângulo qualquer

Quando o fio faz com a vertical um ângulo θ_0 qualquer, pode ser provado pelo princípio de conservação de energia [13, 16] que o período de oscilação é dado por:

$$P(\theta_0) = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \text{sen}^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \text{sen}^4\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \text{sen}^6\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \dots \right\}. \quad (16)$$

A Eq. (16) mostra que o período difere cada vez mais da aproximação de pequenas oscilações, à medida que a amplitude de oscilação cresce. Esse resultado pode ser facilmente constatado experimentalmente, com a utilização de dois pêndulos de mesmo comprimento, mas que oscilem com amplitudes diferentes. A Tabela 1 mostra, além dos valores de alguns ângulos selecionados e seus respectivos senos, o erro percentual do cálculo do período considerando a aproximação para pequenos ângulos (Eq. (7)), e a expansão de $P(\theta_0)$ até o quinto termo (Eq. (16)).

Tabela 1 - Erro percentual relativo ao cálculo do período do pêndulo na aproximação de pequenos ângulos.

$\theta_0(^{\circ})$	$\theta_0(rad)$	$\text{sen}\theta_0$	erro (%)
5	0,0873	0,0872	0,0476
10	0,1745	0,1737	0,1904
20	0,3491	0,3420	0,7611
30	0,5236	0,5000	1,7111
40	0,6981	0,6428	3,0387
50	0,8727	0,7660	4,7410
60	1,0472	0,8660	6,8127
70	1,2217	0,9397	9,2412

Os dados da Tabela 1 foram obtidos da relação:

$$\text{erro}(\theta_0) = \frac{P(\theta_0) - P}{P(\theta_0)} \times 100. \quad (17)$$

A Fig. 5 mostra o gráfico do erro percentual em função do ângulo em graus, destacando o intervalo em que normalmente os experimentos em laboratórios didáticos são realizados.

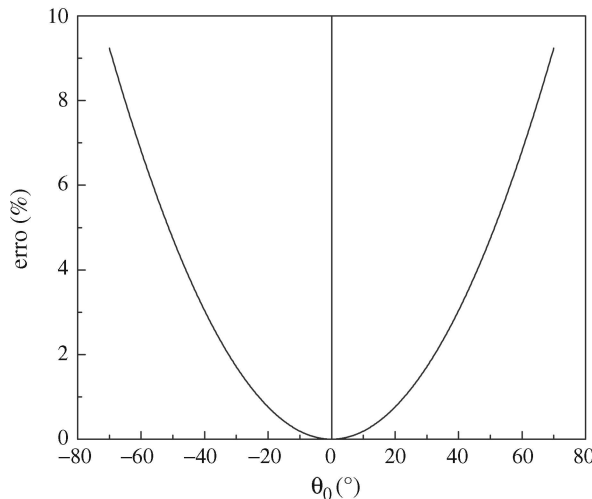


Figura 5 - Variação do erro percentual no cálculo do período do pêndulo em função da amplitude de oscilação.

Este erro percentual, exibido na Tabela 1, pode ser descrito pelo polinômio:

$$\text{erro}(\theta_0) = 0,00189 \theta_0^2 + 0,00747, \quad (18)$$

que permite, com boa aproximação, uma avaliação direta do erro que se comete ao se considerar um determinado ângulo $\theta_0 \in (0^{\circ}, 70^{\circ}]$, podendo auxiliar o professor de Ensino Médio na preparação de atividades experimentais envolvendo o pêndulo simples.

Referências

- [1] C. Fiolhais e J. Trindade, Rev. Bras. Ens. Fis. **25**, 259 (2003).
- [2] I.M. Greca and M.A. Moreira, Science Education **86**, 106 (2002).
- [3] I. Halloun, J. Res. Sci. Teach, **33**, 1019 (1996).
- [4] R.P. Taylor (ed.), *The Computer in the School: Tutor, Too, Tutee* (Teachers' College Press, New York, 1980).
- [5] S. Papert, *Mind Storms: Children, Computers and Powerful Ideas* (Basic Books, New York, 1980).
- [6] E.A. Veit e V.D. Teodoro, Rev. Bras. Ens. Fis. **24**, 87 (2002).
- [7] A. Medeiros e C.F. Medeiros, Rev. Bras. Ens. Fis. **24**, 77 (2002).
- [8] M. Bazin e P. Lucie, Rev. Bras. Ens. Fis. **3**, 3 (1981).
- [9] H. Moysés, Nussenzveig, *Curso de Física Básica* (Ed. Edgard Blücher, São Paulo, 1997), v. 2, 3ªed.

- [10] D. Halliday, R. Resnick e K.S. Krane, *Física* (LTC, Rio de Janeiro, 1996), v. 2.
- [11] N. Villas Boas, R.H. Doca e G.J. Biscuola, *Tópicos de Física* (Ed. Saraiva, São Paulo, 2003), v. 2.
- [12] L.A. Guimarães e M. Fonte Boa, *Física* (Ed. Futura, São Paulo, 2004), v. 1.
- [13] C. Kittel, W.D. Knight e M.A. Luderman, *Curso de Física de Berkeley* (Ed. Blücher, São Paulo, 1970), v. 1.
- [14] D.M. Cláudio e J.M. Marins, *Cálculo Numérico Computacional* (Ed. Atlas S.A., São Paulo, 1989).
- [15] J.S. Figueira e E.A. Veit, *Rev. Bras. Ens. Fis.* **26**, 203 (2004).
- [16] C. Medina, S. Velazco e J. Salinas, *Rev. Bras. Ens. Fis.* **24**, 254 (2002).