Revista Brasileira de Física, Vol. 21, nº 4, 1991

Sur la stabilité des solutions compactifiées à onze dimensions avec les invariants d'Euler

Júlio César Fabris*
Laboratoire de Physiqye Théorique - Institut Henri *Poincaré, Université Pierre et Marie Curie - CNRS, 11, rue Pierre et Marie Curie, 75231 Paris* Cedex *05,* France

Received July 16, 1991

Résumé Nous modifions le Lagrangien de la Supergravité à onze dimensions par l'inclusion des invariants d'Euler. On obtient alors des solutions compactifiées où l'espace-temps est celui de Minkowski, tout en préservant l'espace interne comme une sept-sphère. L'étude de la stabilité de cette configuration permet de restreindre le domaine des valeurs acceptables pour les constantes de couplage présentes dans ce modèle.

1. Introduction

Les théories de Supergravité multidimensionnelles, après réduction dimensionnelle, conduisent généralement à un espace-temps d'anti-deSitter, avec une constante cosmologique dont la valeur est souvent très élevée[1]. Cela est un aspect plutôt indésirable de ces théories, car contredit par l'observation. Par contre, la compactification sur un espace d'Anti-deSitter présente l'agréable caractéristique de conduire à des configurations stables, puisque l'énergie associée à cet espace est bornée inférieurement[2].

Toutefois, les théories formulées à plus de quatre dimensions admettent des généralisations dans leur secteur géométrique par l'inclusion des invariants d'Euler[3]. Ces invariants sont des combinaisons, en général non linéaires, du tenseur de Riemann, du tenseur de Ricci et du scalaire de courbure, qui conduisent à des équations différentielles de deuxième ordre. Un exemple est le terme de Gauss-Bonnet, combinaison quadratique dans les quantités spécifiées ci-dessus, qui est un

* **Adresse Permanente: Departamento de Física e Química, Universidade Federal do Espírito Santo, Goiabeiras, Vitória, ES, Brésil.**

invariant topologique à quatre dimensions, mais qui donne déjà une contribution non-triviale aux équations de champ en cinq dimensions.

Si l'on considère le cas d'une théorie à onze dimensions, on peut ajouter l'invariant d'Euler jusqu'au cinquième ordre. Si nous ajoutons uniquement le terme de Gauss-Bonnet dans le cadre de la théorie de Supergravité $N = 1$, $D = 11$, nous avons un espace-temps de Minkowski à quatre dimensions, mais l'espace à sept dimensions n'est plus compact: c'est une pseudo-sphère[4]. Nous devons, obligatoirement, ajouter au moins l'invariant de troisième ordre pour avoir une configuration avec Minkowski en quatre dimensions et une sept sphère. Il faut signaler que ce type de modification, dans le cadre des théories de Supergravité à plus de quatre dimensions, brise I'invariance supersymétrique de la théorie de départ: le rétablissement de cette invariance est loin d'être un problème simple et ce sujet ne sera pas abordé dans ce travail.

On s'intéresse ici à vérifier l'éventuel stabilité de la configuration $M^4 \times S^7$, obtenue comme décrit ci-dessus, dans le contexte de la théorie de Supergravité $N = 1$, $D = 11$ [5]. Nous utiliserons une méthode perturbative, qui consiste à établir le spectre de mase, dû aux excitations de I'espace interne, associé à cette configuration[6,7,8,9]. La stabilité est directement lié à l'absence de particules de masses imaginaires, les tachyons.

On remarque que dans des conditions plus générales, il faut également tenir compte des résultats de la référence (10), où la stabilité est établie à partir de la convergence de la fonction d'énergie, ce qui indique une limite inférieure pour la masse, mais n'impose pas forcément l'absence de masses imaginaires, lorsque l'espace de base est celui d'anti-deSitter. Ceci est liée au problème de définition de la masse dans des espaces plus généraux que celui de Minkowski.

2. Les solutions de base

Il est connu[1] que, dans le cas de la gravité pure à n dimensions, la présence de la constante cosmologique est nécessaire si l'on veut obtenir, après compactification, un espace-temps de Minkowski en plus d'un espace interne compact. A onze dimensions, en particulier, il est possible d'écrire un Lagrangien géométrique aboutissant à des équations différentielles de deuxième ordre qui contient I'invariant d'Euler jusqu'au cinquième ordre. Pourtant, lorsqu' on considère également la trois forme présente dans la théorie de Supergravité à cette dimension, on peut se restreindre aux trois premiers invariants pour avoir un schéma de compactification conduisant à un espace-temps quadridimensionnel de Minkowski et une sept-sphère. Cette trois forme a un rapport direct avec la structure supersymétrique de cette théorie. En outre, la repartition 4+7 de l'espace-temps total implique. que les contributions des invariants de quatrième et cinquième ordre sont nulles. I1 faut préciser, néanmoins, qu'une telle structure supersymétrique est brisée lorsqu' on introduit ces terms géométriques non linéaires, quoisqu' il existe la possibilité, encore non confirmé par des calculs explicites, qu'elle puisse être rétablie.

Nous sommes intéressés au secteur bosonique d'une telle théorie à onze dimensions généralisée comme décrit ci-dessus. Ainsi, si nous négligeons les corrections du genre FFR, probablement présentes dans une théorie non linéaire supersymétrique, nous pouvons nous borner au Lagrangien suivant:

$$L = \sqrt{g}\{-(1/2)R - (1/48)F_{MNPQ}F^{MNPQ} + [\sqrt{2}/6.(4!)^2\sqrt{g}]\mathcal{E}^{M_1M_2\ldots M_{11}}F_{M_1M_2M_3M_4}F_{M_5M_6M_7M_8}A_{M_9M_{10}M_{11}} + \gamma L_1 + \lambda L_2 \tag{1}$$

où nous avons écrit

$$L_1 = R_{CDEF}R^{CDEF} - 4R_{CD}R^{CD} + R^2\ , \tag{2}$$

$$L_2 = 2R^{ABCD}R_{CDEF}R^{EF}_{\ \ AB} + 8R^{AB}_{\ \ CE}R^{CD}_{\ \ BF}R^{EF}_{\ \ AD} + 24R^{ABCD}R_{CDBE}R^{E}_{\ A} + 24R^{ACBD}R_{BA}R_{DC} + 16R^{AB}R_{BC}R^{C}_{\ A} - 2R^3 + 3RL_1\ . \tag{3}$$

Les équations de champ correspondantes sont:

$$\begin{aligned}
&R_{AB} - (1/2)g_{AB}R + \gamma\{H_{AB} - (1/4)g_{AB}L_1\} + \lambda\{-4R^{P\ \ Q}_{\ A\ \ B}H_{PQ}\\
&- R_{AB}L_2 - 8R^{MN}_{\ \ \ EC}R^{CD}_{\ \ \ MA}R^{E}_{\ BND} - \{2R^{CDM}_{\ \ \ \ \ B}R_{CDEF}R^{EF}_{\ \ \ MA}\} +\\
&+ 8R^{C}_{\ BMN}R^{MN}_{\ \ \ DA}R^{D}_{\ C} - 4R^{CDM}_{\ \ \ \ \ B}R_{CDAN}R^{N}_{\ M} + 4R^{CDM}_{\ \ \ \ \ B}R_{CDMN}R^{N}_{\ A} +\\
&+ 4R^{MNCD}R_{CDMA}R_{BN} + 2RR_{BDMN}R^{MND}_{\ \ \ \ \ \ A}\\
&- 8R^{C}_{\ BMN}R^{M}_{\ C}R^{N}_{\ A} - 8R^{MN}_{\ \ \ CA}R^{C}_{\ M}R_{NB} -\\
&- 8R_{B}^{\ M}R_{MN}R^{N}_{\ A} + 4RR_{NB}R^{N}_{\ A} + (1/6)g_{AB}L_2\} =\\
&= -(1/6)F_{APQR}F_{B}^{\ PQR} + (1/48)g_{AB}F_{PQRS}F^{PQRS}\ ,
\end{aligned} \tag{4}$$

$$F^{ABCD}{}_{;A} = \{\sqrt{2}/(144)^2\}\mathcal{E}^{BCDP_1\dots P_8}F_{P_1\dots P_4}F_{P_5\dots P_8}\ , \tag{5}$$

où

$$H_{AB} = R_{APQR}R_B{}^{PQR} - 2R_{APBQ}R^{PQ} - 2R_{AP}R^P{}_B + RR_{AB}.$$

Ces équations admettent une solution sous la forme d'un produit d'espaces homogènes avec un espace-temps de Minkowski et un espace interne, une sept-sphère:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0, \tag{6}$$

$$R_{abcd} = K(g_{ac}g_{bd} - g_{ac}g_{bd}), \tag{7}$$

$$F_{\mu\nu\rho\sigma} = f\mathcal{E}_{\mu\nu\rho\sigma}\ , \tag{8}$$

où K satisfait la relation

$$K = \{i + \sqrt{1-(20\gamma)/21}\}/10\gamma. \tag{9}$$

Les constantes de couplage λ et γ sont réliées par la relation $80K^2\lambda = 3 - 25K\gamma$. Selon nos conventions, K < 0 implique que l'espace interne est compact. On observe donc que $\gamma < 0$, λ prenant des valeurs négatives ou positives.

3. Le spectre de masse

Nous allons maintenant étudier la stabilité de cette solution. Ainsi, on introduit dans les équations (2) et (3)

$$g_{AB} = \overset{\circ}{g}_{AB} + h_{AB}\quad ,\quad A_{ABC} = \overset{\circ}{A}_{ABC} + a_{ABC}\ , \tag{10}$$

où $g^\circ{}_{AB}$ et $\mathring{A}_{ABC}$ sont les solutions de base (6, 7, 8), h_{AB} et a_{ABC} étant des perturbations autour de ces solutions. Nous utilisons la gauge oú $h^{Pa}{}_{;a} = h^{ea}{}_{;a} = h^a_a = 0$. Des calculs longs, mais assez directes, conduisent aux équations suivantes:

$$\begin{aligned}&\left\{-\frac{169}{40} + \frac{441}{40}c\right\}\{\Box h_{\mu\nu} - h^\rho{}_{\nu;\rho;\mu} - h^\rho{}_{\mu;\rho;\nu} +\\ &+ h^\rho{}_{\rho;\mu;\nu} - g_{\mu\nu}(\Box h^\rho{}_\rho - h^{\rho\sigma}{}_{;\rho;\sigma})\} + \left\{-\frac{85}{40} + \frac{165}{40}c\right\}\{\Delta h_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\Delta h^\rho{}_\rho\}\\ &+ \left\{-\frac{35}{40} + \frac{35}{40}c\right\}g_{\mu\nu}h^{ab}{}_{;a;b} = -g_{\mu\nu}t^\rho{}_{;\rho} - \frac{1}{2}f^2h_{\mu\nu} + \frac{1}{2}f^2g_{\mu\nu}h^\rho{}_\rho,\end{aligned} \tag{11}$$

$$\left\{-\frac{85}{40}+\frac{165}{40}c\right\}\{\Box h_{\mu m}-h^{\rho}_{\mu;\rho;m}+h^{\rho}_{\rho;\mu;m}\}+$$
$$\left\{-\frac{35}{40}+\frac{35}{40}c\right\}\{\Delta h_{\mu m}-h^{a}_{m;a;\mu}-6Kh_{\mu m}\}$$
$$=-ft_{\mu;m}+3f\epsilon^{\rho\sigma\delta}_{\mu}a_{m\rho\sigma;\delta}+\frac{1}{2}f^2h_{\mu m}, \tag{12}$$

$$\left\{-\frac{35}{40}+\frac{35}{40}c\right\}\{\Box h_{mn}+h^{\rho}{}_{\rho;m;n}-g_{mn}\Delta h^{\rho}{}_{\rho}\}+\left\{-\frac{126}{8}+72a\right\}Kh_{mn}+$$
$$\left\{-\frac{126}{40}+\frac{144}{10}c\right\}\{\Delta h_{mn}-h^{a}{}_{n;m;a}-h^{a}{}_{m;n;a}+g_{mn}h^{ab}{}_{;a;b}+7Kh_{mn}\}-$$
$$-\left\{-\frac{85}{40}+\frac{165}{40}c\right\}\{\Box h^{\rho}{}_{\rho}-h^{\sigma\rho}{}_{;\rho;\sigma}\}=g_{mn}ft^{\rho}{}_{;\rho}-\frac{1}{2}f^2g_{mn}h^{\rho}{}_{\rho}+\frac{1}{2}f^2h_{mn}, \tag{13}$$

$$t_{\mu;a;}{}^{a}+t^{\rho}{}_{;\rho;\mu}-\frac{1}{2}fh^{\rho}{}_{\rho;\mu}=0\ , \tag{14}$$

$$\Box a^{n\mu\nu}+\Delta a^{n\mu\nu}-6Ka^{n\mu\nu}-\frac{1}{6}fh_{\rho}{}^{n}{}_{;\sigma}\mathcal{E}^{\sigma\rho\mu\nu}=0\ , \tag{15}$$

$$\Box a^{nm\mu}+\Delta a^{nm\mu}-10Ka^{nm\mu}=0\ , \tag{16}$$

$$\Box a^{nmp}+\Delta a^{nmp}-12Ka^{nmp}=-(\sqrt{2}/6)f\mathcal{E}^{abcdnmp}a_{abc;d}\ . \tag{17}$$

Dans ces équations, nous avons noté $a_{\mu\nu\lambda}=f\mathcal{E}_{\mu\nu\lambda}{}^{\rho}t_{;\rho}, c=\sqrt{1-(20\gamma/21)}$.

Désormais, on écrira les fonctions présentes dans les équations ci-dessus sous la forme f $(x^A)=\hat{f}(x^\mu)\tilde{f}(x^a)$. En plus, pour découpler ces équations, on décomposera les vecteurs et les tenseurs dans leurs parties transversal et longitudinal[12] :

$$V^{\mu}=V^{\mu T}+V^{;\mu}\ , \tag{18}$$

$$T^{\mu\nu}=\hat{T}^{\mu\nu}+T^{\mu;\nu}+T^{;\mu;\nu} \tag{19}$$

où $V^{\mu T}{}_{;\mu}=T^{\mu T}{}_{;\mu}=0$ et $\hat{T}^{\mu\nu}{}_{;\mu}=\hat{T}^{\mu}{}_{\mu}=0$.

Les fonctions f (x^a) peuvent être décomposées en fonctions propres sur la sept-sphère. Les opérateurs sur ces fonctions s'écrivent[13]

$$\Delta Y=-Kr(r+6)Y \qquad ;\quad r>0, \tag{20a}$$

$$\Delta Y^{a}=-K\{r(r+6)-1\}Y^{a} \qquad ;\quad r>1, \tag{20b}$$

$$\Delta Y^{(ab)}=-K\{r(r+6)-1\}Y^{(ab)} \qquad ;\quad r>2, \tag{20c}$$

$$\Delta Y^{[ab]}=-K\{r(r+6)-2\}Y^{[ab]} \qquad ;\quad r>1, \tag{20d}$$

D'autre part, les opérateurs de masse pour les modes scalaires, vectoriels et tensoriels s'écrivent respectivement:

$$\Box T = Km^2 T \ , \tag{21a}$$

$$\Box T_\mu - T^\rho{}_{;\mu;\rho} = Km^2 T_\mu \ , \tag{21b}$$

$$\Box T_{\mu\nu} - T^\rho{}_{(\mu;\nu);\rho} = Km^2 T_{\mu\nu} \ , \tag{21c}$$

Pour découpler les équations (11)-(17), nous suivons un procédé semblable à celui utilisé dans la référence (7) (pour plus de détail, voir également (14)). Nous le résumons ici: la partie sans trace et non-diagonale de (11)nous donne l'équation pour le graviton, particule de spin 2, pour lequel on utilise les opérateurs (20a) et (21c); la partie sans trace et non diagonale de (13) nous donne un mode scalaire dont les opérateurs correspondants sont (20c) et (21a); la partie transversale de (12) nous fournit un mode vectoriel couplé avec (15), qui ont comme opérateurs correspondants (20b) et (21b); l'équation (16), qui représente un pseudo-vecteur, se découple entièrement et nous utilisons les opérateurs (20d) et (21b); l'équation (17) représente un pseudo-scalaire couplé avec son dual, et nous appliquons les opérateurs (20d) et (21a); finalement, les traces de (11) et (13), combinées aux parties longitudinales de (12) et (14) nous donne un système de quatre modes scalaires couplés, pour lesquels on utilise les opérateurs (20a) et (21a).

Le spectre de masse est donné par les valeurs propres de chaque sous-systéme décrit ci-dessus. Dans le cas des sous-systèmes couplés, nous avons des matrices de masse; la diagonalisation de ces matrices nous fournit directement les tours de masse correspondantes. Nous analyserons ces sous systèmes selon leur classification spinorielle. Nous écrirons directement les tours de masse correspondentes:

Spin 2

$$m^2 = r(r+6) \qquad r \geq 0. \tag{22}$$

Spin 1

$$m_1 = \beta\{(D_1 + D_2 + b/2) \pm (D_1 - D_2 + b/2)\}/2D_1 \qquad r \geq 1; \tag{23}$$

$$m_1 = (r+3)^2 - 1 \qquad r \geq 1 \ . \tag{24}$$

Spin 0

$$m_0 = (B_2/D_2)\{r(r+6)-1\} \qquad r \geq 2; \tag{25}$$

$$m_0 = (r+3)^2 \pm \sqrt{2b}(r+3) \qquad r \geq 1\ . \tag{26}$$

$$m_0 = (1+2)r(r+6)\{(c_2+2b_1+2c_1) \pm \sqrt{(c_2+2b_1+2c_1)^2 - 4c_1(b_2+2b_1)\}} \quad r \geq 0. \tag{27}$$

Dans les expressions ci-dessus, nous avons $A_1 = \{-(169/40) + (441/40)c\}$, $D_1 = \{-(85/40) + (165/40)c\}$, $B_2 = \{-(11/2) + 30c\}$, $D_2 = (35/40)\{-1 + c\}$, $b_1 = D_2\{(7/2) - 7a_2 - 6D_2\beta\}/(5B_2 - 7a_1)$, $b_2 = D_2(7a_3 - 7)/(5B_2 - 7a_1)$, $c_1 = \{a_2 - (a_1b_1/D_2\}$, $c_2 = (1 - a_3 - (a_1b_2/D_2)\}$, $a_1 = D_1(5D_1B_2 - 8D_2^2)/x$, $a_2 = D_1\{(7/2)D_1 + 4D_2\}/x$, $a_3 = D_1(7D_1 + 8D_2)/x$, $x = (7D_1^2 - 4A_1D_2)$ et $\beta = r(r+6)$. De plus, nous avons posé $b = -(1/K)$, l'inverse de la magnitude de la courbure de l'espace interne.

4. Analyse des Résultats

Nous avons trouvé au total huit tours de masse, dont une de spin 2, trois de spin 1 et quatre de spin 0. Nous remarquons d'abort qu'il y a une particule de spin 2 de masse nulle qui représente le graviton. De même, il y a deux particules scalaires de masse nulle. Portant, il n'y a pas de particules de spin 1 sans masse, au contraire de ce qui se passe lorsqu'on n'a pas le terme de Gauss-Bonnet. Le photon est donc absent de ce modèle. Ceci peut être dû au fait qu'on n'a pas tenu compte, dans le Lagrangien de départ, des corrections du secteur "maxwellien".

Néanmoins, il y d'autres aspects physiquement intéressants. En particulier, si la valuer du paramètre de couplage γ est compris entre 0 et -2, toutes les masses sont ou bien positives ou bien nulles. Dans ce cas, la configuration choisie est stable. Il faut observer que l'expression (27) contient deux modes, dont un ayant un nombre infini d'états de masse au carré négative. Néanmoins, ce mode obéit à la même équation que les fonctions de jauge, à un facteur d'échelle constant près. Ce n'est donc pas un mode physique (pour plus de détails à ce sujet, voir la référence (14)). En plus, on remarque que l'imposition de la positivité de la masse du mode scalaire donné par l'expression (26) implique une contrainte sur la magnitude de la courbure de l'espace interne:

$$-K \geq 1/8. \tag{28}$$

Ainsi, pour avoir un espace-temps externe de Minkowski stable, il faut que la courbure de l'espace interne soit assez élevée.

Evidement, le modèle développé ici est très limité. Ceci est principalement dû au fait que la supersymétrie existante lorsque les invariants d'Euler sont absents, a été complètement brisée. Néanmoins, les tentatives menées jusqu'ici en vue de rétablir la supersymétrie en présence des termes géométriques non-linéaires n'ont pas aboutit à un succès complet, malgré l'importance de telle structure. Rappelons notamment que la théorie des Supercordes aurait pour limite de basse énergie la théorie de Supergravité N = 1, D = 10 modifiée par la présence de ces terms géométriques non-linéaires.

Le fait que les théories de Supergravité conduisent en général à un espace-temps quadridimensionnel du type anti-deSitter n'est pas, du point de vue physique, satisfaisant puisque l'espace-temps d'anti-deSitter présente des problèmes de causalité globale. Dans le cas des thèories multidimensionnelles, ceci est aggravé par la présence d'une constante cosmologique trop élevée. Ainsi, il est intéressant de vérifier les conditions sous lesquels on peut obtenir, à partir d'une théorie multidimensionnelle, un espace-temps de Minkowski après compactification.

Nous avons vérifiée, dans ce travail, un tel processus de compactification dans la situation particulière où la théorie à onze dimensions est modifiée par l'introduction des invariants d'Euler. La stabilité de la configuration a été démontrée pour une certaine fourchette des valeurs de γ, mais le spectre de particules ne reproduit pas une bonne phénoménologie, dû surtout à l'absence de modes vectoriels de masse nulle. Quoique l'inexistence du photon dans ce modèle puisse être éventuellement surmontée par l'introduction des termes quartiques dans la quatre forme F_{ABCD}, dans le même esprit que dans le cas du terme de Gauss-Bonnet. Mais ceci reste une spéculation.

Remerciements

Je voudrais exprimer ma gratitude à Marco Picco pour avoir lu et critiqué le texte, et à la CAPES pour le support financier.

Références

1. D. Bailin et A. Love, Rep. Progr. Phys. 50, **316 (1987).**
2. B. de Witt et D. Z. Freedman, in **Supersymmetry,** édité par K. Dietz, R. Flume, G. v. Gehlen et V. Rittenberg, NATO ASI Series, Plenum Press, Vol. **125, 1985.**
3. D. Lovelock, J. Math. Phys. 12, **498 (1971).**
4. J. C. Fabris et R. Kerner, Helvetica Physica Acta 62, **427 (1989).**
5. E. Cremmer, B. Julia et J. Scherk, Phys. Lett. **76B, 409 (1978).**
6. A. Salam, et J. Strathdee, Ann. Phys. 141, **316 (1982).**
7. B. Biran, A. Casher, F. Englert, M. Rooman et Ph. Spindel, Phys. Lett. **134B, 179 (1984).**
8. K. Ishikawa, Phys. Lett. **188B, 186 (1987).**
9. J. C. Fabris, Phys. Lett. **223B, 144 (1989).**
10. P. Breitenlohner et D. Z. Freedman, Phys. Lett. **115B, 197 (1982).**
11. F. Miiller-Hoissent, Phys. Lett. **163B, 106 (1985).**
12. G. W. Gibbons et M. J. Perry, Nucl. Phys. **B146, 90 (1978).**
13. O. Yasuda, Stability of Classical Solutions in Kaluza-Klein Theories, Thèse de Doctorat, Université de Tokyo, **1986.**
14. M. Rooman, La Supergravité à **11** Dimensions et la Sphère Octonionique, Thèse de Doctorat, Universitè Libre de Bruxelles, **1984.**

Resumo

Modificamos o Lagrangiano da Supergravidade a onze dimensões pela inclusão dos invariantes de Euler. Obtemos soluções compactificadas onde o espaço-tempo é o de Minkowski, ao mesmo tempo em que mantemos o espaço interno como uma

sete-esfera. O estudo da estabilidade desta configuração permite de restringir o domínio dos valores aceitáveis para as constantes de acoplamento presentes neste modelo.