Revista Brasileira de Física, Vol. 16, nº 4, 1986

Simetrias de Lie e Sistemas Bidimensionais Integráveis

L.P. BUENO, I.C. MOREIRA, O.M. RITTER e F.C. SANTOS
Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Caixa Postal 68528, Rio de Janeiro, 21944, RJ, Brasil

Recebido em 14 de junho de 1986

Resumo Estabelecemos neste trabalho as condições que um sistema dinâmito bidimensional deve satisfazer para admitir simetrias de Lie. Obtemos, então, essas simetrias para diversas situações físicas, e construimos, em alguns casos, as quantidades conservadas a elas associadas. Em seguida utilizamos o método de Lie inverso para gerar classes.de sistemas bidimensionais integráveis. Enfatizamos, concluindo, que o método não permite a identificação de todos os sistemas integráveis bidimensionais.

1. INTRODUÇÃO

A integrabilidade para sistemas hamiltonianos com N graus de liberdade, no sentido de Liouville, pressupõe a existência de N integrais de movimento analíticas, globais, em involução, e independentes do tempo. Liouville[1,2] mostrou que, com a existência dessas N quantidades conservadas, o sistema de equações será integrável por quadraturas. Para um sistema bidimensional, por exemplo, essa integrabilidade significa a existência de uma integral primeira, isolável, e independente do hamiltoniano.

Recentemente os sistemas que não satisfazem estas condições - os sistemas não integráveis - têm sido estudados com grande interesse, em particular no que se refere ao surgimento de estruturas caóticas que poderiam modelar muitos fenômenos complexos da natureza[3,4]. Métodos para a identificação e análise de sistemas integráveis têm, portanto, sua importância.

O procedimento mais direto empregado na construção e determinação de sistemas integráveis parte da suposição de que a integral primeira (quantidade conservada ou invariante, termos mais usados pelos físicos) teria uma forma especifica, por exemplo uma determinada expansão polinomial nos momenta, e analisa as condições impostas ao hamiltoniano do sistema para que ele admita uma quantidade conservada deste tipo. Historicamente, Bertrand introduziu essa idéia[5]. Whittaker[6] a utilizou na análise de sistemas hamiltonianos que admitem quantidades conservadas quadráticas nos momenta e Darboux encontrou soluções bastante gerais para o caso de sistemas bidimensionais. Em anos recentes essas investigações foram retomadas: assim Holt[8] estendeu a análise de Whittaker para quantidades com dependência cúbica nos momenta, Lewis e Leach encontraram o invariante quadrático mais geral para sistemas hamiltonianos unidimensionais e dependentes do tempo[9] e Hietarinta[10] procedeu a um estudo sistemático para os casos bidimensionais com dependência até a quarta potência nos momenta e até a quinta nas coordenadas. Uma extensão do procedimento foi também considerada por Hall[11], permitindo a identificação de quantidades conservadas para sistemas com valores Fixos para a energia. A utilização do método de Whittaker para sistemas não hamiltonianos, partindo diretamente das equações de mcvimento, foi analisada por um de nós[12].

Contudo, não existe ainda um método geral para se determinar se um sistema dinâmico dado é ou não integrável. Entre todos os sistemas possíveis descritos por equações diferenciais conhece-se hoje somente um pequeno número de classes de sistemas integrãveis. Conjeturas importantes sobre as características de um sistema integrável têm sido estudas nos últimos anos, em particular aquela relacionada à propriedade de Painlevé; essa conjetura foi introduzida nos trabalhos de Sofia Kowalevskaia[13] ao analisar, no século passado, a integrabilidade do sistema de equações que descreve rotação de um corpo rígido em torno de um ponto fixo, em um campo gravitacional constante. Diz-se que um sistema possui a propriedade de Painlevé quando as singularidades de suas soluções no plano complexo são polos[14]. Estudos sistemáticos dessa conjetura têm examinado também a integrabilidade de sistemas de equações diferenciais parciais[15]; ela não abrange, contudo, todos os casos integráveis, tendo sido generalizada recentemente (através da chamada propriedade de Painlevé *fraca*) para englobar novos casos integráveis[16]. No entanto, permanece o seu caráter conjetural e a construção das quantidades conservadas por este meio fica na dependência da utilização de outros métodos, como, por exemplo, o método direto de Whittaker.

Neste trabalho procuramos discutir como as simetrias de um sistema de equações diferenciais ordinárias (as simetrias de Lie[17,18]) podem auxiliar na identificação de sistemas integráveis. Fazemos isso para o caso bidimensional e baseados no fato de que, de alguma forma, a existência de quantidades conservadas está ligada às simetrias do sistema, como é claramente demonstrado, no caso de sistemas hamiltonianos, pelo Teorema de Noether[19]. O método de Lie nos permite muitas vezes encontrar quantidades conservadas embora de maneira não tão direta como o Teorema de Noether. A análise das simetrias das equações de movimento pode eventualmente se tornar uma alternativa importante para se estudar a integrabilidade de um sistema dinâmico e para a construção das integrais primeiras.

2. SIMETRIAS DE LIE

Sophus Lie[17] na busca de métodos que auxiliassem a resolução de equações diferenciais introduziu a idéia de transformações contínuas de simetria, ou seja, transformações infinitesimais nas variáveis dependentes e independentes que deixam o sistema de equações invariante. Mostrou, além disso, que os geradores infinitesimaís destas transformações possuem uma estrutura de grupo (os grupos de Lie) e que o conhecimento destas simetrias é um poderoso auxiliar na análise das soluções para o sistema. Isto se aplica tanto a equações diferenciais ordinárias como parciais. Neste trabalho consideraremos somente sistemas bidimensionais e nos ateremos, portanto, a aplicação do método de Lie à equações diferenciais ordinárias e de segunda ordem.

Se partirmos de um sistema descrito pelas equações

$$\Lambda_i \equiv \ddot{x}_i - f_i(x) = 0 \tag{1}$$

as condições de Lie para que estas permaneçam invariantes sob as transformações infinitesimais

$$\begin{aligned} x_i' &= x_i + \varepsilon\eta_i(x,t) \\ t' &= t + \varepsilon\,\xi(x,t) \end{aligned} \tag{2}$$

são[18]

$$U''\Lambda_i = 0 \ . \tag{3}$$

O operador U'' tem a forma

$$U'' = \xi \frac{\partial}{\partial t} + \eta_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta_i' \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} + \eta_i'' \frac{\partial}{\partial \ddot{x}_i}$$

onde

$$\eta_i' = \frac{d\eta_i}{dt} - \dot{x}_i \frac{d\xi}{dt}$$

$$\eta_i'' = \frac{d\eta_i'}{dt} - \ddot{x}_i \frac{d\xi}{dt}$$

(os índices repetidos indicam uma soma em relação a estes índices).

A resolução do sistema de equações diferenciais parciais lineares, obtido da aplicação das condições (3) ao sistema de equações considerado (1) - tomando-se como independentes os termos envolvendo potências diversas nos $\dot{x}_i$ -, permite a identificação das transformações de simetria ξ e η_i para o sistema.

Consideramos agora um resultado importante, é de demonstração simples[21,22], que permite a construção de integrais primeiras (quantidades conservadas) a partir das simetrias de Lie: a aplicação do operador

$$U' = \xi \frac{\partial}{\partial t} + \eta_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta_i' \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \quad ,$$

onde ξ e η_i são simetrias do sistema, a uma quantidade conservada fornece uma segunda quantidade conservada. Isto é

$$\text{Se} \quad \frac{dI_1}{dt} = 0 \quad \text{e} \quad U'I_1 = I_2 \quad , \quad \text{então} \quad \frac{dI_2}{dt} = 0 \quad . \tag{4}$$

A quantidade I_2 obtida por esse processo poderá não ser uma quantidade conservada nova mas uma combinação de outras já conhecidas ou apenas uma constante numérica.

Métodos de construção de integrais primeiras por integração direta e baseados nos geradores de simetria podem também ser aplicados[23,22]

3. SISTEMAS BIDIMENSIONAIS

Dentro do objetivo do trabalho, o de analisar as simetrias de Lie de um sistema bidimensional, aplicamos as condições (3) ao sistema autônomo

$$\begin{aligned} \ddot{x} - f_1(x,y) &= 0 \\ \ddot{y} - f_2(x,y) &= 0 \,. \end{aligned} \tag{5}$$

Fazendo a suposição de serem não lineares as expressões para f_1 e f_2 (as simetrias de Lie para os casos lineares têm sido amplamente consideradas na literatura[24,25]), obtemos de (5) e (3) a forma mais geral para as transformações de simetria

$$\begin{aligned} \xi &= \phi(t) \\ \eta_1 &= (\dot{\phi}/2 + c_2)x + c_1 y + \alpha(t) \\ \eta_2 &= (\dot{\phi}/2 + c_2')y + c_1' x + \beta(t) \end{aligned} \tag{6}$$

com as seguintes equações a serem satisfeitas

$$-\frac{\partial f}{\partial x}\eta_1 - \frac{\partial f}{\partial y}\eta_2 + f_1(c_2 - \frac{3}{2}\dot{\phi}) + c_1 f_2 + \frac{\dddot{\phi}}{2}x + \ddot{\alpha} = 0 \tag{7}$$

$$-\frac{\partial f_2}{\partial y}\eta_2 - \frac{\partial f_2}{\partial x}\eta_1 + f_2(c_2' - \frac{3}{2}\dot{\phi}) + c_1' f_1 + \frac{\dddot{\phi}}{2}y + \ddot{\beta} = 0 \,. \tag{8}$$

Analisaremos a seguir as simetrias de vários casos bidimensionais típicos, com a utilização das expressões (6), (7) e (8).

A - O problema de Kepler

Para um sistema bidimensional com a força $\vec{F} = -\frac{K}{r^2}\hat{r}$ as transformações de simetria serão

$$\begin{aligned} \xi &= C_1 t + C_2 \\ \eta_1 &= \frac{2}{3}C_1 x - C_3 y \\ \eta_2 &= \frac{2}{3}C_1 y + C_3 x \,. \end{aligned} \tag{9}$$

Os geradores independentes são

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial t} \\ X_2 &= x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} \qquad (10) \\ X_3 &= t\frac{\partial}{\partial t} + \frac{2}{3}x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{2}{3}y\frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

e correspondem à simetria de translação temporal, à simetria de rotação e a uma simetria de escala, respectivamente. Os comutadores, que determinam a álgebra de Lie associada a estes geradores são

$$[X_1,X_2] = [X_2,X_3] = 0, \quad [X_1,X_3] = X_1 \quad .$$

Prince e Eliezer[23], partindo do gerador X_3, mostraram a conservação do vetor de Runge-Lenz.

B - Consideremos o sistema hamiltoniano descrito pelo potential

$$V(x,y) = \alpha(x^2+y^2) + \frac{\beta_1}{x^2} + \frac{\beta_2}{y^2} \qquad (11)$$

onde a, β_1 e β_2 são positivos. Trata-se de um sistema evidentemente integrável devido à separabil idade do potential.

Fris e outros[Z6] mostraram que esse potencial, juntamente com mais outros três tipos, pertence a uma classe de sistemas em que todas as órbitas são fechadas para $E<0$. Eles demonstraram isto ao procurarem por sistemas que possuíssem quantidades conservadas quadráticas nas velocidades e utilizando as relações de comutação com o Hamiltoniano.

As equações de movimento para este caso são

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -2\alpha x + \frac{2\beta_1}{x^3} \\ \ddot{y} &= -2\alpha y + \frac{2\beta_2}{y^3} \end{aligned} \qquad (12)$$

e a aplicação das condições de Lie (3) leva aos seguintes geradores

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}$$

$$X_2 = \cos(\sqrt{8\alpha}\, t)\frac{\partial}{\partial t} - \sqrt{2\alpha}\, \mathrm{sen}(\sqrt{8\alpha}\, t)\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{13}$$

$$X_3 = \mathrm{sen}(\sqrt{8\alpha}\, t)\frac{\partial}{\partial t} + \sqrt{2\alpha}\, \cos(\sqrt{8\alpha}\, t)\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

e às relações de comutação

$$[X_1,X_2] = -\sqrt{8\alpha}\, X_3, \quad [X_1,X_3] = \sqrt{8\alpha}\, X_2 \ ,$$

$$[X_2,X_3] = \sqrt{8\alpha}\, X_1 \ .$$

A álgebra de Lie associada a estes geradores é a do SU(2). A estrutura compacta desse grupo está relacionada ao fato das Õrbitas serem fechadas. Note-se que o período do movimento surge na análise dos geradores e de seus comutadores. As trajetórias clássicas são dadas por

$$x^2 = \frac{E_1}{2\alpha} + \left[\frac{E_1^2}{4\alpha^2} - \frac{\beta_1}{\alpha}\right]^{1/2} \mathrm{sen}(\sqrt{8\alpha}\ t + \phi_1)$$

$$y^2 = \frac{E_2}{2\alpha} + \left[\frac{E_2^2}{\ } - \frac{\beta_2}{a}\right]^{1/2} \mathrm{sen}(\sqrt{8\alpha}\ t + \phi_2)$$

onde E = $E_1 + E_2$ = energia total.

A utilização dos operadores U' aplicados à energia dos sistema conduz às seguintes quantidades conservadas

$$U'_{X_1} E = 0$$

$$U'_{X_2} E = \left[-\sqrt{2\alpha}\ \mathrm{sen}(\sqrt{8\alpha}\ t)\right]\left[2\alpha(x^2+y^2) - 2\beta_1/x^2 - 2\beta_2/y^2\right] + \left[x\dot{x}+y\dot{y}\right] \cdot \left[-4\alpha\ \cos(\sqrt{8\alpha}\ t)\right] + \left[\sqrt{2\alpha}\ \mathrm{sen}(\sqrt{8\alpha}\ t)\right]\left[\dot{x}^2+\dot{y}^2\right]$$

$$U'_{X_3} E = \left[\sqrt{2\alpha}\ \cos(\sqrt{8\alpha}\ t)\right]\left[2\alpha(x^2+y^2) - 2\beta_1/x^2 - 2\beta_2/y^2\right] + \left[x\dot{x}+y\dot{y}\right] \cdot \left[-4\alpha\ \mathrm{sen}(\sqrt{8\alpha}\ t)\right] + \left[x^2+y^2\right]\left[-\sqrt{2\alpha}\ \cos(\sqrt{8\alpha}\ t)\right] \ .$$

Eliminando-se a coordenada temporal entre I_1 e I_2 temos a integral primeira que comprova a integrabilidade do sistema

$$I = (\dot{x}^2+\dot{y}^2)^2 + 4\alpha(x\dot{x}+y\dot{y})^2 + \left[2\alpha(x^2+y^2) - \frac{2\beta_1}{x^2} - \frac{2\beta_2}{y^2}\right]^2$$

$$- 4\alpha\left[x^2 + y^2 - \frac{2\beta_1}{x^2} - \frac{2\beta_2}{y^2}\right] (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) .$$

É interessante notar que este sistema apesar de ter todas as órbitas fechadas para $E<0$ não viola o teorema de Bertrand[27] já que o potencial (11) é não central.

C - Sistemas de Henon-Heiles

Em 1964 Henon e Heiles[28], num importante artigo em que analisavam potenciais adequados para a descrição do movimento de una estrela numa galáxia com simetria axial, introduziram o seguinte potencial

$$V = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + x^2y - \frac{1}{3}y^3 . \tag{14}$$

Através de una análise por computadores eles mostraram a não integrabilidade deste sistema (exceto no caso de baixas energias). Esse potencial, ligeiramente generalizado para a forma

$$V = \frac{ax^2}{2} + \frac{by^2}{2} + dx^2y - \frac{1}{3}e\,y^3 \tag{15}$$

tornou-se fonte importante de estudo na área de sistemas não integráveis. Três casos integráveis foram identificados e as quantidades conservadas determinadas. São eles

i - $e = -d$

ii - $e = -6d$

iii - $e = -16d$, $b = 16a$.

O último caso foi proposto por Chang et al.[29], baseados na propriedade de Painlevé.

As condições de Lie aplicadas às equações de movimento obtidas de (15)

$$x = -ax - 2dxy$$
$$y = -by + ey^2 - dx^2 \tag{16}$$

levam ao único gerador

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}$$

Vê-se, por este exemplo, que, ao contrário de suposição usada por Leach[30] na análise do caso em que $a=b=c=d=1$, o sistema pode ser integrável (como nos três casos citados) e não possuir nenhuma outra simetria de Lie, no sentido geométrico aqui atribuido, além da translação temporal. Neste caso o método de Lie não permite a construção de uma segunda quantidade conservada se nos ativermos somente a simetrias geométricas. Note-se que os casos integráveis acima podem ser obtidos em conjunto se utilizarmos o Teorema de Noether e admitirmos transformações de simetria que dependam das velocidades**.

D - Potencial Quártico

O potencial

$$V = \frac{Ax^2}{2} + \frac{By^2}{2} + Cx^4 + Dx^2y^2 + Ey^4 \tag{17}$$

tem sido utilizado como modelo simplificado em teorias de campo e também examinado em relação à integrabilidade.

As condições de Lie conduzem a dois casos especiais:

i - $A \neq B$

Neste caso o único gerador de simetria é

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t} \tag{18}$$

e o método não permite a identificação de casos integráveis. Outros métodos, como o teorema de Noether[31], por exemplo, levam aos seguintes casos integráveis

a) $E = C$, $D = 2C$;

b) $C = 16E$, $D = 12E$, $A = 4B$;

c) $C = 8E$, $D = 6E$, $A = 4B$.

ii - $A = B$

Se $C = D = E/2$ os geradores de simetria são

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}$$
$$X_2 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} \tag{19}$$

e a quantidade conservada é $I = x\dot{y}-\dot{x}y$.

Um outro caso integrável, não determinado pelas simetrias de Lie, ocorre para

$$C = E \; ; \; D = 6C \; .$$

E - Rede de Toda

O potencial introduzido por Toda para interação exponencial entre partículas quando aplicado ao caso de duas massas e supondo-se os extremos fixos tem a forma

$$V = e^{-ax} + e^{b(x-y)} + e^{y} \; . \tag{20}$$

O Único gerador de Lie que as equações de movimento para esse caso possuem é a translação temporal

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}$$

o'que não permite a construção de integrais primeiras pelo procedimento que estamos utilizando. A identificação dos casos integráveis para esse potencial foi feita por Bountis et *al.*[32], pelo método que usa a propriedade de Painlevé, e as integrais primeiras obtidas pelo método direto por Dorizzi et *al.*[33]. Os casos integráveis ocorrem para

a - $m_1/m_2 = 1$, $a=b=1$

b - $m_1/m_2 = 1$, $a=1$, $b=1/2$

c - $m_1/m_2=1/2$, $a=1$, $b=1/2$.

F - Potencial de Nikolaevski e Schur

Um sistema bidimensional reconhecidamente não integrável foi estudado por Nikolaevski e Schur[34] que o introduziram como um caso particular das equações de Yang-Mills clássicas e que é descrito pelo potencial

$$V = \frac{x^2 y^2}{2} \tag{21}$$

Os geradores de simetria associados às equações de movimento provenientes desse potencial são

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial t} \\ X_2 &= -t\,\frac{\partial}{\partial t} + x\,\frac{\partial}{\partial x} + y\,\frac{\partial}{\partial y} \end{aligned} \tag{22}$$

com o comutador $[X_2, X_1] = -X_1$.

A aplicação de U' à energia não conduz a uma nova quantidade conservada

$$U'_{X_1} E = 0 \quad ; \quad U'_{X_2} E = 4E$$

As simetrias de translação temporal e de escala não são suficientes neste caso para garantir a integrabilidade do sistema.

G - Sistema não Hamiltonianos

Consideremos dois exemplos simples de sistema não hamiltonianos e analisemos suas simetrias de Lie:

i - As equações de movimento

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\dot{y} \\ y &= -y \end{aligned} \tag{23}$$

admitem os seguintes geradores de simetria

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial/\partial t \\ X_2 &= \operatorname{sen} t\,\frac{\partial}{\partial x} - \cos t\,\frac{\partial}{\partial y} \\ X_3 &= \cos t\,\frac{\partial}{\partial x} + \operatorname{sen} t\,\frac{\partial}{\partial y} \\ X_4 &= t\,\frac{\partial}{\partial x} \\ X_5 &= \partial/\partial x\ . \end{aligned} \tag{24}$$

A integrabilidade do sistema é facilmente detetável. Duas de suas quantidades conservadas são

$$I = \dot{x}+y \quad \text{e} \quad I = \dot{y}^2/2 + y^2/2$$

ii - Para as equações

$$\ddot{x} = 1/x^2y$$
$$\ddot{y} = x/y^4 \tag{25}$$

os geradores de simetria são

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}$$
$$X_2 = 2t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} \tag{26}$$
$$X_3 = t^2\frac{\partial}{\partial t} + tx\frac{\partial}{\partial x} + ty\frac{\partial}{\partial y}$$

onstituindo a álgebra $SO(2,1)$.

Pelo método direto de identificação de quantidades conservadas obtem-se a seguinte expressão

$$I = \frac{y^2\dot{x}^2}{2} + \frac{x^2\dot{y}^2}{2} - xy\dot{x}\dot{y} + \frac{y}{x} + \frac{x^3}{3y^3} \quad . \tag{27}$$

A aplicação de U' neste caso não gera novas quantidades conservadas

$$U'_{X_1} I = U'_{X_2} I = U'_{X_3} I = 0$$

Apesar deste sistema possuir uma estrutura de simetria significativa só conseguimos identificar a quantidade conservada indicada. A integrabilidade ou não desse sistema permanece em aberto.

É interessante observar que na análise da integrabilidade de sistemas não hamiltonianos muito pouco se conhece. Os principais resultados de estudos sobre integrabilidade de sistemas dinâmicos, como o teorema de Liouville ou o teorema KAM, se referem a sistemas hamiltonianos.

4. CONSTRUÇÃO DE SISTEMAS BIDIMENSIONAIS INTEGRÁVEIS

Os exemplos da seção anterior sugerem a idéia de que, dentro de certas limitações, um sistema poderá ser integrável se possuir uma estrutura adequada de simetrias de Lie e que poderíamos construir as integrais primeiras adicionais a partir destas transformações de simetria. Procederemos, então, à resolução, em vários casos, do problema inverso do considerado na seção 3: encontrar as equações de movimento que possuem um determinado grupo de simetria e, para sistemas hamiltonianos, identificar classes de sistemas integráveis.

Consideraremos alguns casos particulares das transformações para sistemas bidimensionais não lineares (6) que possuam uma estrutura de simetrias não trivial

A -

$$\begin{aligned} \xi &= \phi(t) \\ \eta_1 &= \frac{\dot{\phi}(t)}{2}\, x \\ \eta_2 &= \frac{\dot{\phi}(t)}{2}\, y \quad . \end{aligned} \tag{28}$$

A substituição de (28) nas condições (7) e (8) conduz às equações

$$\begin{aligned} \dddot{\phi} - \dot{\phi}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{y}{x} + \frac{3f_1}{x}\right) &= 0 \\ \dddot{\phi} - \dot{\phi}\left(\frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{x}{y} + \frac{3f_2}{y}\right) &= 0 \quad . \end{aligned} \tag{29}$$

Como ϕ é função somente de t, teremos

$$\begin{aligned} f_1 &= \psi\left(\frac{x}{y}\right)\frac{1}{x^3} + Kx \\ f_2 &= \rho\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{y^3} + Ky \end{aligned} \tag{30}$$

$$\dddot{\phi} = 4K\dot{\phi} \tag{31}$$

onde K é uma constante, ψ e ρ funções arbitrárias.

Se o sistema for hamiltoniano, a energia será

$$E = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\dot{y}^2}{2} - \int\psi\, x^{-3}\, dx - \frac{K}{2}(x^2+y^2) \quad . \tag{32}$$

A partir das soluções de (31), três casos se distinguem:

AI - $K = 0$

Teremos então

$$\begin{aligned} \xi &= B_1 t^2 + B_2 t + B_3 \\ \eta_1 &= (B_1 t + B_2/2)x \\ \eta_2 &= (B_1 t + B_2/2)y \end{aligned} \tag{33}$$

Os geradores formarão a álgebra SO(2,1)

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial t} \\ X_2 &= 2t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} \\ X_3 &= t^2\frac{\partial}{\partial t} + tx\frac{\partial}{\partial x} + ty\frac{\partial}{\partial y} \quad . \end{aligned} \tag{34}$$

Se o sistema for hamiltoniano a aplicação de U'_{X_1} à energia nos permitirá identificar uma segunda quantidade conservada e mostrar, portanto a sua integrabilidade. Fazemos isto aplicando primeiramente U'_{X_3}

$$U'_{X_3}E = 2tE - (x\dot{x}+y\dot{y}) = I_1 \quad . \tag{35}$$

Obtivemos assim uma quantidade conservada com uma dependência temporal explícita. Fazendo uso da mesma propriedade de U'_{X_3} aplicada a I_1, teremos

$$U'_{X_3}I = 2t^2E - 2t(x\dot{x}+y\dot{y}) + (x^2+y^2) \quad . \tag{36}$$

Eliminando a coordenada temporal entre eqs. (35) e (36) achamos a seguinte quantidade conservada para os sistemas com o hamiltoniano (32)(com $K=0$)

$$I = (\dot{x}y-x\dot{y})^2 + 2(x^2+y^2)V$$

ou (37)

$$I = 2E(x^2+y^2) - (x\dot{x}+y\dot{y})^2 \quad .$$

Um caso particular é o do sistema com potencial $V = (1/xy)$. Além da energia esse sistema possui a seguinte integral primeira

$$I = \frac{y^2\dot{x}^2}{2} + \frac{x^2\dot{y}^2}{2} - xy\dot{x}\dot{y} + \frac{y}{x} + \frac{x}{y} \ .$$

A2 - $K = w^2 > 0$

Neste caso os geradores infinitesimais serão

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial t} \\ X_2 &= e^{2wt}\left(\frac{\partial}{\partial t} + wx\frac{\partial}{\partial x} + wy\frac{\partial}{\partial y}\right) \\ X_3 &= e^{-2wt}\left(\frac{\partial}{\partial t} - wx\frac{\partial}{\partial x} - wy\frac{\partial}{\partial y}\right) \end{aligned} \tag{38}$$

com as relações de comutação

$$[X_1,X_2] = 2wX_2 \ ; \quad [X_2,X_3] = -4wX_1 \quad ; \quad [X_1,X_3] = -2wX_3 \ .$$

Utilizando os operadores U'_{X_i} aplicando à energia eq. (32), para este caso, teremos

$$\begin{aligned} U'_{X_1}E &= 0 \\ U'_{X_2}E &= 2w\ e^{2wt}\{w(x\dot{x}+y\dot{y}) - [E+w^2(x^2+y^2)]\} = 2wI_1 \\ U'_{X_3}E &= 2w\ e^{-2wt}\{w(x\dot{x}+y\dot{y}) + [E+w^2(x^2+y^2)]\} = 2wI_2 \ . \end{aligned} \tag{39}$$

O produto de I_1 e I_2 será também uma quantidade conservada e indeoendente do tempo

$$I = w^2(x\dot{x}+y\dot{y}) - \left[E + w^2(x^2+y^2)\right]^2 \qquad (40)$$

mostrando a integrabilidade desta classe de sistemas.

A3 - $K = - w^2 < 0$

Neste caso temos os seguintes geradores

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}$$

$$X_2 = \text{sen } 2wt \frac{\partial}{\partial t} + \cos 2wt \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial \psi}\right) \qquad (41)$$

$$X_3 = \cos 2wt \frac{\partial}{\partial t} - \text{sen } 2wt \left(r\frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right)$$

que obedecem à algebra do SU(2). A segunda quantidade conservada obtida **pelo** processo que **estamos** ut**ilizando** será

$$I = \left[E - w^2(x^2+y^2)\right]^2 + w^2(x\dot{x}+y\dot{y})^2 . \qquad (42)$$

B - Façamos agora a seguinte escolha para as transformações de simetria

$$\xi = C,$$

$$\eta_1 = \alpha(t) \qquad (43)$$

$$\eta_2 = \beta(t) .$$

As condições (7) e (8) levam a

$$\alpha = C_1\, e^{wt} + C_2\, e^{-wt}$$

$$\beta = C_3\alpha \qquad (44)$$

$$f_1 = w^2x + \phi(y-C_3x)$$

$$f_2 = w^2y + \psi(y-C_3x) . \qquad (45)$$

Os geradores de simetria são

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}$$

$$X_2 = e^{wt}\frac{\partial}{\partial x} + C_3 e^{wt}\frac{\partial}{\partial y} \qquad (46)$$

$$X_3 = e^{-wt}\frac{\partial}{\partial x} + C_3\, e^{-wt}\frac{\partial}{\partial y} \quad ,$$

com os comutadores

$$[X_1,X_2] = wX_2 \quad ; \quad [X_1,X_3] = -wX_3 \quad ; \quad [X_2,X_3] = 0 \quad . \qquad (47)$$

Para um sistema hamiltoniano deste tipo a energia é

$$E = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\dot{y}^2}{2} - \frac{w^2}{2}\,(x^2+y^2) + V(y-C_3x) \quad . \qquad (48)$$

Os operadores U'_{X_i} correspondentes a eq. (46), quando aplicados a eq. (48) fornecem

$$U'_{X_1}E = 0$$

$$U'_{X_2}E = e^{wt}(\dot{x}-wx) + C_3(\dot{y}-wy) = I_1 \qquad (49)$$

$$U'_{X_3}E = e^{-wt}(\dot{x}+wx) + C_3(\dot{y}+wy) = I_2$$

Eliminando t entre I_1 e I_2 chega-se à quantidade conservada

$$I = (\dot{x}+C_3\dot{y})^2 - w^2(x+C_3y)^2 \quad . \qquad (50)$$

Analogamente ao que fizemos nos casos anteriores, outras escolhas particulares podem ser feitas para as transformações de simetria e, pelo uso das condições (7) e (8), as equações de movimento que as admitem podem ser determinadas. Para sistemas hamiltonianos podem ser determinados casos integráveis embora, como já visto no item anterior, as simetrias geométricas de Lie não permitam a determinação de todos eles.

5. CONCLUSÕES

Podemos resumir em três pontos principais a análise do método de Lie, como aplicado neste trabalho:

i - O conhecimento das simetrias de Lie pode, em vários casos, permitir a obtenção de quantidades conservadas e identificar algumas classes de sistemas integráveis (seção 3). Em livro recente sobre a Mecânica Clássica, Santilli[35] afirma: *Also, it is not known at this time, even formally, whether or not Lie's method can produce all symmetries needed for the solution of a system by quadratures.* Se nos restringirmos às simetrias geométricas os exemplos analisados mostram que a resposta a esta questão de Santilli é negativa: o método de Lie não permite a identificação e a construção de quantidades conservadas para todos os casos integráveis (por exemplo, casos III-C, III-E). A construção das quantidades conservadas a partir das simetrias é feita através de um processo de integração direta[2..23] ou através do operador primeira extensão U' [p.ex., casos III-B e IV-A].

ii - O procedimento aqui empregado permite muitas vezes a identicação de simetrias geométricas não obtidas pelo Teorema de Noether [caso III-A].

iii - O método aplica-se também a sistemas não-hamiltonianos, ao contrário do Teorema de Noether [p. ex., casos III-G i, III-G ii].

Generalizações do método poderiam, eventualmente, suprir algumas de suas deficiências. Uma generalização possível seria admitir-se transformações de simetrias dependentes das velocidades (por exemplo, transformações de contato) buscando identificar outros casos integráveis e construir as integrais primeiras. Uma outra extensão: analisar as simetrias (de Lie ou de Noether) para sistemas haniltonianos sobre uma hipersuperfície com valor fixo para a energia. A idéia de identificar quantidades que sejam invariantes apenas para um valor fixo da energia foi introduzida por L.S. Hall[10] que as denominou de *invariantes configuracionais*. Analogamente ,poderíamos introduzir o conceito de *simetrias configuracionais* como aquelas transformações que mantêm a equação (ou a ação) invariantes sobre uma hipersuperfície de energia constante; estas simetrias poderiam ser utilizadas, no Teorema de Noether ou no método de Lie, para a identificação de invariantes configuracionais. Uma aplicação importante desse tipo de extensão seria o desenvolvimento de processos de identificação de simetrias e invariantes aproximados.

Um problema fundamental permanece: a especificação clara da estrutura mínima de simetria suficiente para a integrabilidade do sistema. Este é um ponto importante cujo discernimento ajudaria a esclarecer as relações entre: simetria x integrabilidade x estrutura analítica das soluções (Propriedade de Painlevé).

REFERÊNCIAS

1. J.Liouville, Journal de Math. XX, 137 (1855).
2. V. I.Arnold, *Les Méthodes Mathématiques de la Mécanique Classique*, (Mir, Moscou, 1976).
3. M.V.Berry, Topics in Nonlinear Dynamics, Am. Inst. Phys. Conf.Proc. 46, 16 (1978).
4. *Stochastic Behavior in Classical and Quantum Mechanical Systems*, G. Casati and J.Ford, eds. (Springer-Verlag, NY, 1984).
5. J. Bertrand, J. Math. (i) XVII, 121 (1852).
6. E.T.Whittaker, *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, 4th ed. (Camb. Univ. Press, London, 1937).
7. G.Darboux, Arch.Néerl. (ii) VI, 371 (1901).
8. C.R.Holt, J.Math.Phys. 23, 1037 (1982).
9. H.R.Lewis and P.G.L.Leach, J.Math.Phys.23, 2371 (1982).
10. J.Hietarinta, Phys. Lett. A96, 273 (1983).
11. L.S.Hall, Physica D*8*, 90 (1983).
12. I.C.Moreira, Hadron.J. 7, 475 (1984).
13. S.Kowalewskaia, Acta Math. 12, 177 (1889); 14, 81 (1891).
14. M.J. Ablowitz, A.Ramani and H.Segur, J.Math.Phys. 21, 715 (1980).
15. J.Weiss, M.Tabor and G.Carnevale, J.Math.Phys.*22*, 522 (1983).
16. A.Ramani, B.Dorizzi and B.Grammaticos, Phys. Rev. Lett. *49*,21, 1539 (1982).
17. S.Lie, *Vorlesungen über Differential Gleichungen* (Teubner, Leipzig, 1891).
18. G.W.Bluman and J.D.Cole, *Similarity Methods for Differential Equations* (Springer-Verlag, NY, 1974).
19. E.Noether, Nachr.Akad.Wiss Göttingem, Math.Phys. kl, 11, 235(1918).
20. F.Schwarz, J. Phys. A16, L133 (1983).

21. M.Lutzky, J.Phys. A*11*, 249 (1978).
22. I.C.Moreira, O.M.Ritter, F.C.Santos, Rev.Bras.Fis.*15*, 174 (1985).
23. G.E.Prince and C.J.Eliezer, J.Phys. A*14*, 587 (1981).
24. G.E.Prince and C.J.Eliezer, J.Phys. A*13*, 815 (1980).
25. P.G.L.Leach, J.Math.Phys.*21*, 300 (1980).
26. I.Fris, V.Mandrosov, J.A.Smorodinsky, M.Uhlir and P.Winternitz,Phys. Lett. 16, 354 (1965).
27. L.A.Pars, *A Treatise* on *Analytical Dynamics* (J. Willey, NY, 1965).
28. M.Hénon and C.Heiles, Astron. J. 69, 73 (1964).
29. Y.F.Chang, M.Tabor and J.Weiss, J.Math.Phys. 23, 531 (1982).
30. P.G.L.Leach, J.Math.Phys. 22, 679 (1980).
31. I.C.Moreira, Teorema de Noether e Sistemas Bidimensionais Integráveis, preprint, UFRJ, 1986.
32. T.Bountis, H.Segur and F.Vivaldi, Phys. Rev. A25, 1257 (1982).
33. B.Dorizzi, B.Grammaticos, R.Padjen and V. Papageorgiou, J.Math.Phys. 25, 2200 (1984).
34. E.S.Nikolaevskii and L.N.Schur, Sov.Phys. JETP 58, 1 (1983).
35. R.M. Santilli, *Foundations* **of** *Theoretical Mechanics*, vol.II,(Springer-Verlag, New York, 1983).

Abstract

We establish the conditions that a two-dimensional dynamical system must satisfy to have Lie's symmetries. Then we obtain these symmetries for several physical situations, and construct the conserved quantities associated to these symmetries, in some cases. Furthermore we use the inverse Lie method to generate classes of integrable systems. We emphasize in the conclusion that the method does not allow the construction of all integrable systems.