Revista Brasileira de Física, Vol. 15, n? 2, 1985

Simetrias de Lie para o Problema da Interação da Carga Elétrica-Monopolo Magnético

I.C. MOREIRA, O.M. RITTER e F.C. SANTOS

Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Caixa Postal 68528, Rio de Janeiro, 21944, RJ, Brasil

Recebido em 23 de julho de 1985

Resumo Analisamos nesse trabalho as simetrias da equação de movimento para uma carga elétrica interagindo com um monopolo magnêtico. Dois métodos de identificação das integrais primeiras e que partem do conhecimento das simetrias de Lie são discutidos e aplicados neste caso. Comparamos também o processo de obtenção destas simetrias com anãlises que partem de formulação hamiltoniana.

1. INTRODUÇÃO

Os trabalhos de Sophus Lie, que, no final do século passado, analisou as transformações contínuas que deixam invariante uma equação diferencial, têm sido reestudados e estendidos, em aplicações variadas, a sistemas de equações não lineares, ordinárias ou parciais. Lie e outros[1,2,3] mostraram que o conhecimento dessas transformações (ou "simetrias") de uma equação diferencial pode ser Ütil na busca de soluções (através da construção de constantes de integração que permitem a redução da ordem da equação), na separação de variáveis e na eventual linearização da equação (4). O método adquire, além disso, uma especial importância de um ponto de vista físico já que as quantidades conservadas têm, frequentemente, uma interpretação significativa neste contexto.

Uma maneira usualmente empregada na obtenção de quantidades conservadas para sistemas hamiltonianos é o Teorema de Noether[5], processo este que pode ser considerado como uma extensão especial do método de Lie quando aplicado a sistemas que admitem um principio variacional. Conhecido um lagrangeano para o sistema e obtidas as suas simetrias (simetrias de Noether) podemos encontrar, através do Teorema de Noether, as quantidades conservadas a elas associadas.

O grupo de simetrias geométricas (ou seja, transformações que dependem apenas das coordenadas espaciais e da coordenada temporal) obtido diretamente da equação dinâmica do sistema é mais amplo do que o obtido através de um lagrangeano específico, pelo uso do Teorema de Noether, e o contém como subgrupo. Essa é uma possível vantagem de se analisar as simetrias a partir diretamente das equações de movimento (ou de campo) ; uma consequência disso é que podemos obter quantidades conservadas não fornecidas pelas simetrias .geométricas de Noether. Outra vantagem do método de Lie é que pode ser aplicado a sistemas mais gerais que não admitem uma descrição lagrangeana ou que só a admitem pelo uso de potenciais contendo singularidades.

Um caso de particular importância física que não admite uma descrição lagrangeana convencional é o problema da interação entre uma carga elétrica e um monopolo magnético. A descrição lagrangeana, necessária para a quantização do sistema, pode ser efetuada através de generalizações de vários tipos: a introdução de potenciais singulares (com "strings")[6], de espaços fibrados[7] ou de variáveis adicionais[8]. A análise das simetrias e a construção de integrais primeiras podem ser feitas dentro dessas várias abordagens. Jackiw[9] aplicou o Teorema de Noether a um lagrangeano com um potencial singular para obter o grupo dinâmico de simetrias $SO(3) \times SO(2,1)$. Sokolov[8] introduziu uma variável adicional no problema e construiu um lagrangeano sem singularidades nes e espaço quadridimensional. Wu e Yang[7] para evitar a singularidade no potencial dividiram o espaço fora do monopolo (suposto fixo na origem) em duas regiões R_a e R_b, com interseção, e definiram potenciais livres de singularidade em R_a e R_b; essa abordagem encontra uma formulação matemática precisa na teoria dos espaços fibrados. Neste trabalho apresentamos uma outra alternativa na análise das simetrias e quantidades conservadas para esse sistema: aplicamos o método de Lie à equação de movimento da carga elétrica interagindo com o monopolo magnético[19].

Na seção 2 apresentamos, de maneira abreviada, o método de identificação das simetrias de um sistema de equações diferenciais e na seção 3 o aplicamos ao problema físico considerado.

Discutimos também dois métodos de construção de quantidades conservadas a partir do conhecimento destas simetrias [Seção 4]. Embora não exista um processo direto para isto, como no caso do Teorema de Noether, ainda assim o conhecimento do grupo de simetrias contém importantes informações sobre a dinâmica do sistema e seus invariantes. No caso considerado, as quantidades conservadas permitem determinar facilmente a trajetória da carga; além disso, o conhecimento do grupo de simetrias $SO(3) \times SO(2,1)$ permitiu a elegante quantização desse sistema realizada por Jackiw[9]. Na seção 5, mostramos que o Teorema de Noether aplicado ao lagrangeano de Sokolov conduz à mesma estrutura de simetrias.

2. SIMETRIAS DE LIE

Consideraremos, resumidamente, o procedimento de Lie para encontrar as transformações infinitesimais que mantêm invariante um sistema de equações ordinárias de 2ª ordem. Para uma equação diferencial genérica desse tipo:

$$\Lambda_i = \ddot{x}_i - f_i(\dot{x}_i, x_i, t) = 0 \quad , \tag{1}$$

submetida às transformações infinitesimais (que dependem apenas das coordenadas espaciais e da coordenada temporal) :

$$\begin{aligned} \bar{t} &= t + \varepsilon\xi(x_i, t) \\ \bar{x}_i &= x_i + \varepsilon\eta_i(x_i, t) \quad , \end{aligned} \tag{2}$$

permanecer invariante, as condições de Lie são:

$$U''\Lambda_{(i)} = 0 \ . \tag{3}$$

O operador U'' tem a seguinte forma:

$$U'' = \xi\frac{\partial}{\partial t} + \eta_i\frac{\partial}{\partial x_i} + \eta_i'\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} + \eta_i''\frac{\partial}{\partial \ddot{x}_i} \tag{4}$$

sendo

$$\begin{aligned} \eta_i' &= \frac{d\eta_i}{dt} - \dot{x}_i\frac{d\xi}{dt} \\ \eta_i'' &= \frac{d\eta_i'}{dt} - \ddot{x}_i\frac{d\xi}{dt} \ . \end{aligned}$$

Essas condições aplicadas ao sistema de equações considerado conduz a um sistema de equações diferenciais lineares nos ξ e η_i que, resolvido, permite a identificação das transformações de simetria geométrica do sistema (1).

Em trabalhos recentes foram encontrados os grupos de simetrias de Lie para o oscilador harmônico simples[10], para o oscilador n-dimensional com frequência dependente do tempo[11], para o problema de Kepler[12] e para uma carga em um campo magnético constante[13].

3. O PROBLEMA CLÁSSICO DA INTERAÇÃO CARGA ELÉTRICA-MONOPOLO MAGNÉTICO

Henri Poincaré, em 1896[14], foi um dos primeiros a analisar o movimento de uma partícula carregada no campo de um monopolo magnético. Dirac[6] deu tratamento quântico ao problema e demonstrou a importante relação:

$$\frac{eg}{c} = n\,\frac{\hbar}{2}\ , \quad n \text{ inteiro.} \quad \text{I}\ ,$$

que liga a quantização da carga elétrica q com a da carga magnética g. Embora todas as tentativas experimentais de deteção de monopolos magnéticos tenham falhado, eles continuam a despertar interesse em especial no contexto das modernas teorias de gauge[15].

A análise das simetrias do sistema carga - monopolo foi feita, através do Teorema de Noether, por Jackiw[9], utilizando o lagrangeano de interação:

$$L_{\text{int}} = \frac{e}{c}\,\vec{v}.\vec{A} \qquad (5)$$

onde $\vec{A}$ é necessariamente singular para que o campo magnético do monopolo possa ser obtido de $\vec{A}$ pela relação:

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{B} = g\,\frac{\hat{r}}{r^2}\ .$$

Jackiw analisou também as implicações do grupo de simetrias dinâmicas na quantização do sistema, construindo com a sua ajuda o espectro e as funções de onda para a equação de Schrodinger correspondente (ver também a ref. 16).

A equação clássica de movimento de uma carga elétrica no campo de um monopolo fixo na origem é:

$$\ddot{\vec{r}} = a\,\frac{\vec{v}\times\vec{r}}{r^3}\ , \quad \text{onde } a = \frac{eg}{mc} \qquad (6)$$

Aplicaremos o método de Lie a esta equação, o que nos permitirá a identificação de seu grupo de simetrias geométricas e nos possibilitará a obtenção de quantidades conservadas. Observe-se que, ao se partir diretamente das equações de movimento, evitamos os problemas ligados à singularidade do vetor potencial A (e, portanto, ao L_{int}).

As condições de Lie (3) aplicadas à equação (6) levam, em coordenadas cartesianas, a um sistema de 36 equações diferenciais parciais, lineares e acopladas que, resolvidas, conduzem às seguintes expressões para os ξ e η_i:

$$\begin{aligned}
\xi &= C_1 t^2 + 2C_2 t + C_6 \\
\eta_x &= C_1 tx + C_2 x + C_3 y + C_4 z \\
\eta_y &= C_1 ty + C_2 y - C_3 x + C_5 z \\
\eta_z &= C_1 tz + C_2 z - C_4 x - C_5 y
\end{aligned}$$

Os geradores de simetria linearmente independentes serão portanto:

$$\begin{aligned}
G_1 &= \frac{\partial}{\partial t} \\
G_2 &= 2t \frac{\partial}{\partial t} + x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \\
G_3 &= t^2 \frac{\partial}{\partial t} + t x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \\
G_4 &= x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \\
G_5 &= z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \\
G_6 &= y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y}
\end{aligned} \tag{7}$$

Esses geradores obedecem às seguintes relações de comutação:

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{G_2}{2}, G_1\right] = -G_1 \; ; \quad \left[\frac{G_2}{2}, G_3\right] = G_3 \; ; \quad \left[G_1, G_3\right] = G_2 \\
&\left[G_4, G_5\right] = G_6 \; ; \quad \left[G_4, G_6\right] = -G_5 \; ; \quad \left[G_5, G_6\right] = G_4
\end{aligned} \tag{8}$$

As transformações de simetrias finitas podem ser obtidas por integração das transformações infinitesimais em (7):

$$G_1 : t \rightarrow t' = t + \alpha$$

$$G_2 : t \rightarrow t' = e^{2\alpha} t$$

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}\,' = e^{\alpha} \vec{r}$$

$$G_3 : r \rightarrow r' = \frac{\vec{r}}{1-\alpha t}$$

$$t \rightarrow t' = \frac{t}{1-\alpha t}$$

$$G_4 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$G_5 : \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} z' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix}$$

$$G_6 : \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

Como se vê, trata-se de um grupo contendo os subgrupos: SO(3) (corresporidendo à simetria de rotação) e SO(2,1) (correspondendo à simetria temporal, à simetria de escala e a uma simetria conforme especial). Essa estrutura de grupo foi obtida por Jackiw[9] através do Teorema de Noether aplicado ao lagrangeano com a interação (5) e com a utilização de simetrias dinâmicas, supostas lineares nas velocidades. No processo aqui considerado não necessitamos introduzir este Ansatz de Jackiw e evitamos, como já foi dito, o problema da singularidade no potencial.

4. QUANTIDADES CONSERVADAS

A identificação de quantidades conservadas é um dos objetivos mais importantes na análise das simetrias de um sistema físico. Se partirmos de uma descrição lagrangeana o Teorema de Noether[5] nos permite construir diretamente uma quantidade conservada $I(x_i, \dot{x}_i, t)$ associada a cada transformação de simetria, pela expressão:

$$I = (\xi \dot{x}_i - \eta_i) \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \xi L + h(x,t) \qquad (9)$$

onde as simetrias devem satisfazer às condições:

$$U'L + \dot{\xi}L = \frac{dh}{dt} \tag{10}$$

O operador U' é o chamado operador primeira extensão de U:

$$U' = \xi \frac{\partial}{\partial t} + \eta_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta_i' \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} .$$

E de se notar que lagrangeanos equivalentes (que conduzem às mesmas equações de movimento) podem associar diferentes simetrias à mesma quantidade conservada ou vice-versa[*].

No entanto, para as simetrias de Lie das equações diferenciais não existe um procedimento tão direto de construção de quantidades conservadas: torna-se necessário estudar novos procedimentos que, mesmo indiretamente, conduzam a estas quantidades. Apresentamos a seguir dois métodos nesta direção.

a) 1º método

Mostraremos que, dada uma quantidade conservada $I(\dot{x}_i, x_i, t)$, a quantidade $I^* = U'I$ é também conservada[1].

Seja uma quantidade conservada $I(\dot{x}_i, x_i, t)$. Ao longo da trajetória γ (solução da equação de movimento (1)), temos:

$$\frac{dI(\dot{x}_i, x_i, t)}{dt} = 0 ; \tag{11}$$

quando fizermos a transformação de simetria (2) I terá a expressão:

$$I = I(\dot{x}_i', x_i', t')$$

na nova trajetória γ' e continuará a ser uma constante de movimento, ou seja:

$$\frac{dI(\dot{x}_i', x_i', t')}{dt'} = 0 . \tag{12}$$

Como a transformação é infinitesimal:

$$I(\dot{x}_i', x_i', t') = I(\dot{x}_i, x_i, t) + \xi \frac{\partial I}{\partial t} + \eta_i \frac{\partial I}{\partial x_i} + (\dot{\eta}_i - \dot{x}_i \dot{\xi}) \frac{\partial I}{\partial \dot{x}_i} \tag{13}$$

Derivando (13) em relação a t:

$$\frac{dt'}{dt}\ \frac{dI(\dot{x}_i',x_i',t')}{dt'} = \frac{dI}{dt} + \frac{d}{dt}\{\xi\frac{\partial I}{\partial t} + \eta_i\frac{\partial I}{\partial x_i} + (\dot{\eta}_i - \dot{x}_i\,\dot{\xi})\frac{\partial I}{\partial \dot{x}_i}\} \tag{14}$$

De (11), (12) e (14), chegamos a:

$$\frac{d}{dt}\{\xi\frac{\partial I}{\partial t} + \eta_i\frac{\partial I}{\partial x_i} + (\dot{\eta}_i-\dot{x}_i\,\dot{\xi})\frac{\partial I}{\partial \dot{x}_i}\} = 0 \tag{15}$$

ou seja,

$$\frac{d(U'I)}{dt} = 0 \Rightarrow U'I = I' = \text{quantidade conservada} \tag{16}$$

A expressão (16) significa que a variação de uma quantidade conservada, sob uma transformação de simetria, é novamente uma quantidade conservada.

Este resultado é bastante útil na construçãa de outras quantidades conservadas partindo-se do conhecimento de uma delas e do grupo de simetrias; nem sempre, no entanto, a aplicação de U' leva a uma nova quantidade conservada podendo I' ser trivial ou ser uma função de quantidades já conhecidas.

Utilizaremos este método para a equação de movimento (6) (com m=1). Uma quantidade conservada facilmente identificada para esta equação é a energia cinética $\phi_1 = \vec{v}^2/2$, já que a força magnética é sempre perpendicular à velocidade da carga, preservando seu módulo. Aplicaremos a ϕ_1 a extensão primeira dos operadores $G_1,\ldots,G_6$.

$$\begin{aligned}
G_1' &= \frac{\partial}{\partial t} \\
G_2' &= 2t\frac{\partial}{\partial t} + x_i\frac{\partial}{\partial x_i} - \dot{x}_i\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \\
G_3' &= t^2\frac{\partial}{\partial t} + tx_i\frac{\partial}{\partial x_i} + (x_i-t\dot{x}_i)\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \\
G_4' &= x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} - \dot{y}\frac{\partial}{\partial \dot{x}} + \dot{x}\frac{\partial}{\partial \dot{y}} \\
G_5' &= z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z} + \dot{z}\frac{\partial}{\partial \dot{x}} - \dot{x}\frac{\partial}{\partial \dot{z}} \\
G_6' &= y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y} + \dot{y}\frac{\partial}{\partial \dot{z}} - \dot{z}\frac{\partial}{\partial \dot{y}}
\end{aligned} \tag{17}$$

Operando em ϕ_1 eles conduzem a:

$$G_1'\phi_1 = G_4'\phi_1 = G_5'\phi_1 = G_6'\phi_1 = 0$$

$$G_2'\phi_1 = -2\phi_1$$

$$G_3'\phi_1 = \vec{r}.\vec{v}-t\vec{v}^2 = \vec{r}.\vec{v}-2t\phi_1 = \phi_2$$

Construímos pela aplicação de G_3' a ϕ_1 uma outra quantidade conservada ϕ_2 que, por sua vez, pode agora ser operada por G_n' (17):

$$G_2'\phi_2 = G_4'\phi_2 = G_5'\phi_2 = G_6'\phi_2 = 0$$

$$G_1'\phi_2 = -2\phi_1$$

$$G_3'\phi_2 = (t^2\vec{v}^2 - 2t\vec{r}.\vec{v}+\vec{r}^2) = \phi_3 .$$

Os operadores G_n' aplicados à quantidade conservada ϕ_3 não trazem resultados novos.

A obtenção das componentes do momento angular generalizado pode ser feita de maneira idêntica. A partir da conservação de uma das componentes, por exemplo

$$J_x = \phi_4 = (y\dot{z}-z\dot{y}) - \frac{ax}{r} ,$$

as outras duas componentes são construídas pela aplicação de G_4' e G_5':

$$G_4'\phi_4 = -\left[\dot{x}z - x\dot{z} - \frac{ay}{r}\right] = -J_y$$

$$G_5'\phi_4 = x\dot{y} - y\dot{x} - \frac{az}{r} = J_z$$

A equação de movimento (6) possui então as seguintes quantidades conservadas:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{\vec{v}^2}{2} \\ \phi_2 &= \vec{v}.(\vec{r}-\vec{v}t) \\ \phi_3 &= (\vec{r} - \vec{v}t)^2 \\ \vec{J} &= \vec{r} \times \vec{v} - \frac{a\vec{r}}{r} \end{aligned} \tag{18}$$

Note-se que ϕ_1 é conservada para qualquer tipo de força perpendicular a $\vec{v}$ e ϕ_2 e ϕ_3 são conservadas para qualquer força perpendicular a $\vec{v}$ e a $\vec{r}$.

As quantidades (18) permitem determinar facilmente a trajetória da carga no campo do monopolo.

Tomando-se o produto escalar do momento angular total conservado $\vec{J}$ com o vetor posição obtemos:

$$\vec{J}.\vec{r} = Jr \cos\theta = -ar ,$$

logo

$$\cos\theta = -\frac{a}{J} = \text{constante}$$

Portanto a trajetória estará contida na superfície de um cone circular reto que faz um ângulo θ com o vetor $\vec{J}$; a direção de $\vec{J}$ determina o eixo de simetria do cone:

A parte orbital de $\vec{J}$: $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{v}$ tem módulo constante já que $J^2 = L^2+a^2$, e precessa em torno de $\vec{J}$ de maneira similar ao pião simétrico em torno de um eixo vertical (esta analogia foi usada por Sokolov[8] para descrever o movimento em um espaço quadridimensional (ver seção 5)).

Se tomarmos o instante de aproximação máxima de carga do monopolo como sendo t=0 a constante ϕ_3 será a medida desta distância ao quadrado:

$$\phi_3 = r_0^2$$

Usando ϕ_2 e ϕ_3 encontramos a variação temporal da separação entre as partículas:

$$r^2 = 2\phi_1 t^2 + r_0^2$$

A taxa de giro do vetor posição pode também ser facilmente obtida usando-se, em particular, as expressões para estas quantidades conservadas em coordenadas esféricas. Da conservação de L^2 segue-se a validade de uma relação similar à 2ª Lei de Kepler para o movimento da carga sobre o cone: seu raio vetor (do apex do cone) descreve áreas iguais em tempos iguais. Além disso, como a força é normal à superfície do cone o movimento da partícula percorrerá uma geodésica sobre o cone (a conservação de ϕ_1 e $|\vec{L}|$ garantem isto).

b) 2º método

Um outro procedimento para se obter quantidades conservadas foi introduzido na ref.12 e pode ser resumido da seguinte forma:

a) Determinam-se os invariantes para o operator G'_n;

b) Obtém-se um sistema de equações de 1ª ordem invariantes pelo operador G''_n derivando-se os invariantes uns em relação aos outros;

c) Integram-se as equações, obtendo-se constantes de integração em funções dos invariantes;

d) Explicitando-se os invariantes em função dos x_i e de t, chega-se facilmente às quantidades conservadas.

Para exemplificar consideremos o gerador G_4. As funções invariantes geradas pelo operador estendido G'_4 (17) são encontradas resolvendo-se o sistema:

$$\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x} = \frac{d\dot{x}}{\dot{y}} = -\frac{d\dot{y}}{\dot{x}}$$

Consideremos os seguintes invariantes e suas derivadas temporais:

$$u_1 = x^2 + y^2 \quad ; \quad v_1 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \quad ; \quad v_2 = \dot{z}^2$$

$$\dot{u}_1 = 2(x\dot{x}+y\dot{y}) \quad ; \quad \dot{v}_1 = 2a\dot{z}(\dot{y}x-\dot{x}y)/r^3$$

$$\dot{v}_2 = 2\dot{z}(y\dot{x}-\dot{y}x)/r^3$$

Assim o sistema de equações

$$\frac{dv_1}{du_1} = \frac{\dot{v}_1}{\dot{u}_1} = \frac{a\dot{z}(\dot{y}x-\dot{x}y)/r^3}{x\dot{x}-y\dot{y}}$$

$$\frac{dv_2}{du_1} = \frac{\dot{v}_2}{\dot{u}_1} = \frac{a\dot{z}(\dot{x}y-\dot{y}x)/r^3}{x\dot{x}+y\dot{y}}$$

é invariante sob a transformação G''_4. Comparando as duas equações obtemos:

$$-\frac{dv_1}{du_1} = \frac{dv_1}{du_1}$$

que, integrada, conduz à seguinte constante:

$$v_1 + v_1 = \text{constante}$$

ou

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \text{constante}$$

Esse procedimento pode ser repetido para os demais geradores e outras quantidades conservadas podem ser obt'idas. Apesar de frequentemente ser bastante trabalhoso, a importância desse método reside no fato de que podemos descobrir quantidades conservadas associadas com uma dada simetria sem o conhecimento prévio de qualquer quantidade conservada ao contrário do 1º Método, de utilização muito mais direta mas que depende do conhecimento de uma quantidade conservada para a obtenção de outras. Aplicando-se conjuntamente os dois métodos tem-se um processo sistemático de construção de quantidades conservadas a partir das simetrias de um sistema de equações diferenciais ordinárias.

5. SIMETRIAS DO LAGRANGEANO DE SOKOLOV

Sokolov, em 1976[8], construiu um formalismo lagrangeano e canônico, rotacionalmente invariante, com a finalidade de evitar as complicações matemáticas que surgem na teoria de Dirac do monopolo magnético, ou seja, o aparecimento de singularidades no potencial e a necessidade de se aplicar o "veto de Dirac" para a quantização do sistema[6]. Para isto ele introduziu uma variável adicional ao descrever o movimento da carga: utiliza como coordenadas a separação r entre as cargas e os ângulos de Euler α, β e γ, onde α e β correspondem às coordenadas esféricas θ e ϕ, e γ é a variãvel angular adicional.

Nessas coordenadas o lagrangeano tem a forma:

$$L = \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{r^2}{2}\,(\dot{\beta}^2 + \dot{\alpha}^2\,\mathrm{sen}^2\beta) - \frac{eg}{c}\,(\dot{\alpha}\cos\beta + \dot{\gamma}) \tag{19}$$

O momento canônico conjugado à variável angular γ vale:

$$p_\gamma = -\frac{eg}{c}$$

e é a projeção do momento angular $\vec{J}$ no eixo de simetria do sistema: $\vec{J}.\hat{r} = -eg/c = p_\gamma$. Em termos quânticos os autovalores de $\vec{J}.\hat{r}$ serão discretos o que conduz à relação de Dirac sem a necessidade da imposição do "veto de Dirac".

A aplicação das condições de Noether (10) ao lagrangeano (19) conduz a um sistema de 19 equações diferenciais parciais lineares que, resolvido, permite a identificação dos seguintes geradores de simetria:

$$G_1 = \frac{\partial}{\partial t}$$

$$G_2 = t\,\frac{\partial}{\partial t} + \frac{r}{2}\,\frac{\partial}{\partial r}$$

$$G_3 = t^2\,\frac{\partial}{\partial t} + tr\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{r^2}{2a}\,\frac{\partial}{\partial \gamma}$$

$$G_4 = \frac{\partial}{\partial \alpha}$$

$$G_5 = -\cos\alpha\ \mathrm{ctg}\,\beta\,\frac{\partial}{\partial \alpha} - \mathrm{sen}\,\alpha\,\frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{\cos\alpha}{\mathrm{sen}\,\beta}\,\frac{\partial}{\partial \gamma}$$

$$G_6 = -\,\mathrm{sen}\,\alpha\ \mathrm{ctg}\,\beta\,\frac{\partial}{\partial \alpha} + \cos\alpha\,\frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{\mathrm{sen}\,\alpha}{\mathrm{sen}\,\beta}\,\frac{\partial}{\partial \gamma}$$

$$G_7 = -\,\frac{h(r,t)}{a}\,\frac{\partial}{\partial \gamma}$$

Os seis primeiros geradores formam, nessas coordenadas esféricas, a estrutura de grupo já obtida pelas simetrias de Lie. O sétimo gerador aparece devido a introdução da coordenada γ que entra no lagrangeano (19) através de sua derivada $\dot{\gamma}$.

As quantidades conservadas podem agora ser obtidas a partir desses geradores e da expressão (9):

$$I_1 = \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{\dot{r}^2}{2}\,(\dot{\beta}^2 + \dot{\alpha}^2\,\mathrm{sen}^2\beta)$$

$$I_2 = tI_1 - \frac{r\dot{r}}{2}$$

$$I_3 = 2t^2 I_1 - 2tr\dot{r} + r^2$$

$$I_4 = \dot{\alpha} r^2\,\mathrm{sen}^2\beta - a\cos\beta \tag{21}$$

$$I_5 = I_4\cos\alpha\ \mathrm{ctg}\,\beta + r^2\dot{\beta}\,\mathrm{sen}\,\alpha + a\,\frac{\cos\alpha}{\mathrm{sen}\,\beta}$$

$$I_6 = I_4\,\mathrm{sen}\,\alpha\ \mathrm{ctg}\,\beta - r^2\dot{\beta}\cos\alpha - a\,\frac{\mathrm{sen}\,\alpha}{\mathrm{sen}\,\beta}$$

$$I_7 = 0$$

As expressões I_1 a I_6 correspondem às quantidades conservadas (18) em coordenadas esféricas.

6. CONCLUSÃO

A identificação das simétrias do sistema físico considerado é mais simples do ponto de vista do método de Lie do que nas diversas formulações lagrangeanas já que evita a introdução de singularidades, prescinde da utilização de variáveis adicionais e dispensa o uso de espaços com graus de liberdade internos (espaços fibrados). Isto porque, a nível clássico, a construção de um formalismo lagrangeano é desnecessária para descrição do sistema. A obtenção das quantidades conservadas exige, no entanto, procedimentos de aplicação não tão direta quanto o Teorema de Noether nas formulações lagrangeanas.

Para a quantização do sistema as descrições lagrangeanas (dentro dos conhecimentos atuais) são imprescindíveis; neste caso o procedimento de Wu e Yang[20] nos parece mais sugestivo pelo seu significado geométrico e pela introdução de conceitos matemáticos úteis nas teorias de gauge mais gerais que o eletromagnetismo.

Dedicamos esse trabalho à memória da nossa amiga e companheira Márcia Lima Ramos.

REFERENCIAS

1. S. Lie, *Vorlesunger uber Differentialgleichunger*, (Leipzig, Teubner, 1891).
2. L.V. Ovsjannikov, *Gruppovye Svoystva Differentsialny Uravneni* (Siberian Section of the Academy of Science of USSR, Novosibirsk, 1962).
3. G.W. Bluman and J.D. Cole, *Similarity Methods for Differential Equations* (Springer-Verlag, New York, 1974).
4. P. Winternitz, in *Nonlinear Phenomena*, ed. K.B. Wolf (Springer-Verlag, 1983).
5. E. Noether, Nachr. Ges. Wiss. Gottingen 235, 57 (1918).
6. P.A.M. Dirac, Proc. Roy. Soc. *A133*, 60 (1931).
7. T.T. Wu and C.N. Yang, Phys. Rev. *D12*, 3845 (1975).
8. V.V. Sokolov, Sov. J. Nucl. Phys. 23, 330 (1976).
9. R. Jackiw, Ann. of Phys. 129, 183 (1980).
10. C.E. Wulfman and B.G. Wybourne, J. Phys.A: Math. Gen. 9, 507 (1976).

11. G.E. Prince and C.J. Eliezer, J.Phys.A: Math.Gen. 13, 815 (1980).
12. G.E. Prince and C.J. Eliezer, J.Phys.A: Math.Gen. 14, 587 (1981).
13. I.C. Moreira, Supl. Ciência e Cultura 35, 252 (1983).
14. H. Poincaré, Compt. Rendus 123, 530 (1896).
15. P. Goddard and D.I. Olive, Rep.Prog.Phys. 41, 1357 (1978).
16. P.L. Ferreira, Lett. N. Cim. 35, 171 (1982).
17. I.C. Moreira, Rev. Bras. Fís. 13, 534 (1983).
18. M. Lutzky, J. Phys. A: Math. Gen. *11*, 249 (1978).
19. I.C. Moreira, O.M. Ritter and F.C. Santos, J.Phys.A: Math. Gen. *18*, L427 (1985).
20. T.T. Wu and C.N. Yang Phys. Rev. *D14*, 437 (1976).

Abstract

In this work we analyse the symmetries of the equation of motion for an electric charge interacting with a magnetic monopole. Two methods, starting from the knowledge of the Lie symmetries, are discussed and employed in this case. We also compare this procedure with the hamiltonians methods.