Revista Brasileira de Física, Vol. 13, nº 3, 1983

Novos Invariantes para Sistemas de Ermakov

I.C. MOREIRA

Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Caixa Postal 68528, Rio de Janeiro, 21944, RJ, Brasil

Recebido em 13 de setembro de 1983

Resumo Discutimos neste trabalho a obtenção de invariantes para sistemas de Ermakov, pela utilização do Teorema de Noether. Introduz-se também um método de obtenção direta deste tipo de Invariantes partindo-se das equações de movimento, São apresentados alguns exemplos simples para sistemas clássicos em uma e em duas dimensões,

1. INTRODUÇÃO

Para qualquer sistema mecânico as quantidades conservadas têm importância tanto na resolução dinâmica de suas equações de movimento quanto na sua interpretação física. Por isto a obtenção destes invariantes tem sido sempre, na dinâmica clássica ou quântica, motivo de interesse especial. Nos últimos anos, certos invariantes foram obtidos para algumas equações de movimento, nos chamados sistemas de Ermakov[1-4]. Nestes sistemas, submetidos a forças que têm, em geral, dependência explícita no tempo, o invariante depende de uma ou mais variáveis auxiliares que obedecem, por sua vez, a uma ou mais equações diferenciais.

O primeiro invariante deste tipo foi indicado por Ermakov[1] para o oscilador dependente do tempo; posteriormente, ele foi analisado por Courant e Snyder[2] e por Lewis[3,4]. Para a equação de movimento do oscilador unidimensional dependente do tempo

$$\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0 \qquad (1)$$

o invariante de Ermakov tem a forma

$$I_1 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{\rho}\right)^2 + (\dot{\rho}x - \dot{x}\rho)^2\right] \qquad (2)$$

onde ρ satisfaz à equação auxiliar

$$\ddot{\rho} + \omega^2(t)\rho = 1/\rho^3 \qquad (3)$$

O sistema constituído pela equação (1), pelo invariante I_0, e pela equação auxiliar (3) é chamado de um sistema de Ermakov. Originalmente este invariante foi obtido por tentativa através do exame da equação de movimento (1).

Courant e Snyder[2] empregaram este sistema na análise da estabilidade de órbitas de partículas carregadas em campos magnéticos, em aceleradores do tipo ciclotron. Lewis e Riesenfeld[4] utilizaram o invariante I_0 para obter, pela primeira vez, a descrição quântica exata do oscilador dependente do tempo. Eles mostraram que as soluções da equação de Schrödinger para este caso podem ser expressas como uma combinação linear das autofunções de I_0, e trataram ρ como uma variável clássica obedecendo à equação auxiliar (3). Após este trabalho, diversas extensões e análises sobre estes sistemas e outros similares foram realizadas[5-11]; foram aí considerados casos multidimensionais e com possíveis acoplamentos entre as equações (1) e (3). Estados coerentes do oscilador dependente do tempo, puderam também ser expressos com a ajuda de I_0[12]. Para um artigo de revisão sobre o assunto o leitor interessado poderá consultar o trabalho de Ray[14].

Aplicamos aqui, na seção 3, uma idéia de Lutzky[8] que obtem invariantes deste tipo através do Teorema de Noether[13,15,16]. Após uma breve revisão deste teorema, na seção 2, obtemos Invariantes de Ermakov para outras equações de movimento que modelam várias situações físicas simples, em uma e em duas dimensões. Os invariantes de Ermakov podem ser utilizados, como será exemplificado, para se resolver uma equação diferencial conhecendo-se a solução da equação auxiliar ou vice-versa[9].

Na seção 4, estabelecemos condições gerais para a existência destes invariantes a partir das equações de movimento. Isto pode ser feito com restrições variadas na forma do invariante e no número de equações auxiliares. Empregamos este método, o caso de oscilador unidimensional, para a obtenção de invariantes biquadráticos e lineares em x e $\dot{x}$.

Na seção 5 discutimos, à guisa de conclusão, os diversos procedimentos de obtenção destes invariantes.

2. O TEOREMA DE NOETHER

Em 1918 Emmie Noether[15] demonstrou teoremas de grande utilidade e beleza relacionando as transformações de simetria contínuas de um sistema e quantidades conservadas neste sistema. No formalismo lagrangeano as transformações de simetria de um sistema são transformações em suas coordenadas espaciais e temporal que deixam a ação clássica invariante (a menos de uma constante) conduzindo, portanto, às mesmas equações de movimento. Sendo

$$S = \int L\, dt \tag{4}$$

isto implica que o lagrangeano deverá, após as transformações de simetria nas coordenadas, assumir a forma

$$L(x_i', \dot{x}_i', t')dt' = L(x_i, \dot{x}_i, t)dt + \frac{dg}{dt}\, dt \tag{5}$$

Expressaremos aqui, resumidamente, os resultados do Teorema de Noether na sua versão mais simples, onde se supõe que as transformações nas coordenadas dependam apenas da posição e do tempo e não das velocidades (são as chamadas transformações de simetria geométricas). Para uma revisão recente do Teorema de Noether e suas várias generalizações poderá ser consultado o artigo de Cantrijn e Sarlet[16].

Sejam as transformações infinitesimais

$$x_i \to x_i' = x_i + \varepsilon \eta_i(x_i, t) \tag{6}$$

$$t \to t' = t + \varepsilon\, \xi(x_i, t) \tag{7}$$

onde ε é uma quantidade infinitesimal e η_i e ξ são funções bem comportadas dos x_i e de t. As condições (6) e (7) para que estas transformações sejam de simetria levam à seguinte equação para ξ e η_i

$$\xi \frac{\partial L}{\partial t} + \eta_i \frac{\partial L}{\partial x_i} + (\dot{\eta}_i - \dot{x}_i \dot{\xi}) \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} + \dot{\xi} L = dg/dt \tag{8}$$

onde g é uma função dos x_i e de t. A relação (8) estabelece um sistema de equações diferenciais parciais nas diversas potências dos $\dot{x}_i$ que, quando resolvidas, permitem a obtenção das transformações de sinetria geométricas para o lagrangeano dado. Estas transformações formam um grupo contínuo (o grupo de Noether) que é um subgrupo do grupo formado por todas as transformações de simetria que deixam as equações de movimento do sistema invariantes (as chamadas simetrias de Lie)[17,18].

A segunda parte dos resultados de Noether nos permite obter, associada a cada transformação de simetria, uma quantidade conservada, dada pela expressão

$$I = (\xi \dot{x}_i - \eta_i) \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \xi L + g \tag{9}$$

Em geral, as quantidades conservadas obtidas de (9), pelo uso das simetrias geométricas, não serão todas funcionalmente independentes. Os casos fisicamente mais importantes e conhecidos são: a conservação da energia relacionada à simetria temporal, a conservação do momento linear relacionada à simetria de translação espacial e a conservação do momento angular à simetria de rotação, para os lagrangeanos usualmente utilizados. Note-se, no entanto, que em vários sistemas físicos podem existir outros lagrangeanos que reproduzem as mesmas equações de movimento e, portanto, a quantidade conservada relacionada por (9) a uma determinada transformação de simetria pode variar dependendo do lagrangeano usado[19,20].

3. INVARIANTES DE ERMAKOV VIA O TEOREMA DE NOETHER

(i) Generalizando resultados anteriores[8,14] aplicaremos, inicialmente, o Teorema de Noether para uma partícula que obedece à seguinte equação de movimento

$$\ddot{x} + \lambda(t)\dot{x} + k(t)x = f(t) + \frac{h(t)}{x^2} + \frac{p(t)}{x^3} \tag{10}$$

Esta equação pode ser obtida através do lagrangeano

$$L = e^{\Lambda(t)} \left[\frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} + fx - \frac{p}{2x^2} - \frac{h}{x}\right] \tag{11}$$

onde

$$\Lambda(t) = \int \lambda(t)dt \tag{12}$$

Tomaremos sempre, por simplicidade, a massa da partícula como unitária.

Aplicando as condições de Noether (8) a este lagrangeano teremos as seguintes equações em ξ e η_i

$$\xi(-\frac{kx^2}{2}\dot{\Lambda} + fx\dot{\Lambda} - \frac{p}{2x^2}\dot{\Lambda} - \frac{h}{x}\dot{\Lambda} + \dot{f}x - \frac{\dot{p}}{2x^2} - \frac{\dot{h}}{x} - \frac{\dot{k}x^2}{2})$$

$$+ \eta(f - kx + \frac{p}{x^3} + \frac{h}{x^2}) + \frac{\partial\xi}{\partial t}(-\frac{kx}{2} + fx - \frac{p}{2x^2} - \frac{h}{x}) = \frac{\partial g}{\partial t}e^{-\Lambda} \tag{13a}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} - \frac{kx^2}{2}\frac{\partial\xi}{\partial x} + (fx - \frac{p}{2x^2} - \frac{h}{x})\frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x}e^{-\Lambda} \tag{13b}$$

$$\frac{\xi\dot{\Lambda}}{2} + \frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial\xi}{\partial t} = 0 \tag{13c}$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = 0 \tag{13d}$$

A solução deste sistema de equações é

$$\xi = \xi(t)$$

$$\eta = \frac{\dot{\xi}x}{2} - \frac{\xi\dot{\Lambda}x}{2} + \mu(t) \tag{14}$$

$$g = \frac{\ddot{\xi}x^2}{2}e^{\Lambda} - \frac{\dot{\widehat{\xi\dot{\Lambda}}}}{4}x^2 e^{\Lambda} + \dot{\mu}xe^{\Lambda} + \beta(t)e^{\Lambda}$$

onde ξ, μ e β satisfazem o sistema de equações ordinárias

$$\dddot{\xi} - \xi(\dddot{\Lambda}) - 2\dot{\xi}(\ddot{\Lambda}) - (\dot{\Lambda})^2\dot{\xi} - \dot{\Lambda}(\ddot{\Lambda})\xi + 4k\dot{\xi} + 2\dot{k}\xi = 0 \tag{15a}$$

$$\xi(\frac{\dot{p}}{2} + p\dot{\Lambda}) = \mu h \tag{15b}$$

$$h\dot{\xi} = -\xi(2\dot{h} + 3\dot{\Lambda}h) \tag{15c}$$

$$\mu p = 0 \tag{15d}$$

$$\ddot{\mu} + \dot{\mu}\dot{\Lambda} + k\mu = \frac{3}{2}f\dot{\xi} + \xi\dot{f} + \frac{\xi\dot{\Lambda}}{2}f \tag{15e}$$

$$e^{\Lambda}\beta = \int e^{\Lambda}f\mu dt \tag{15f}$$

A generalidade destas equações leva-nos a considerar várias situações particulares:

(a) $h = 0,\ p = 0$.

Trata-se do oscilador forçado, dependente do tempo, e com dissipação linear (supondo $k(t)>0$). Usando-se a eq.(9) chegamos ao invariante

$$I_1 = e^{\Lambda}\left[\frac{\ddot{\xi}x^2}{4} + \xi\left(\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} + \frac{\dot{\Lambda}x\dot{x}}{2} - fx - \frac{\ddot{\Lambda}x^2}{4}\right) - \dot{\xi}\left(\frac{x\dot{x}}{2} + \frac{\dot{\Lambda}x^2}{4}\right) + \dot{\mu}x - \dot{x}\mu\right] + \int e^{\Lambda}(f\mu)\,dt \qquad (16)$$

Esta forma geral de I_1 conduz, em situações específicas, a invariantes já conhecidos e a novos outros; por exemplo:

1 - $\lambda = 0,\ f = 0$

Corresponde à equação de movimento (1). Obtemos o invariante original de Ermakov I_0 com a equação auxiliar (3), fazendo $\xi = \rho^2$ e integrando a equação (15a), para este caso.

2 - $k = 0,\ \lambda = 0$

A equação de movimento fica $\ddot{x} = f(t)$ e as transformações de simetria

$$\xi = C_1t^2 + C_2t + C_3$$

$$\eta = \left(C_1t + \frac{C_2}{2}\right)x + \mu(t)$$

o invariante tem a forma

$$I_1 = C_1x^2/2 + (C_1t^2 + C_2t + C_3)(\dot{x}^2/2 - fx) - x\dot{x}(C_1t + C_2/2) - \mu\dot{x} + \dot{\mu}x + \int\mu f dt \qquad (17)$$

onde

$$\ddot{\mu} = \frac{3}{2}f\,(2C_1t + C_2) + (C_1t^2 + C_2t + C_3)\dot{f}$$

(b) $\underline{f = h = 0}$.

A equação de movimento fica

$$\ddot{x} + \lambda(t)\dot{x} + k(t)x = \frac{p(t)}{x^3}$$

e as equações (15) se reduzem a

$$\xi\left(\frac{\dot{p}}{2} + p\dot{\Lambda}\right) = 0 \tag{18a}$$

$$\dddot{\xi} + \dot{\xi}\left[4k - 2\ddot{\Lambda} - (\dot{\Lambda})^2\right] + \xi\left[2\dot{k} - \dddot{\Lambda} - \dot{\Lambda}(\ddot{\Lambda})\right] = 0 \tag{18b}$$

$$\mu = 0 \tag{18c}$$

A primeira destas equações leva a uma dependência específica de p em relação ao tempo para que a transformação de simetria 5 seja diferente de zero

$$p(t) = Ce^{-2\Lambda}$$

Utilizando estes valores na eq.(14), o invariante proveniente da eq. (9) terá a forma

$$I_3 = e^{\Lambda}\left[\frac{\xi\dot{x}^2}{2} - \frac{\dot{\xi}x\dot{x}}{2} + \xi\left(\frac{\Lambda x\dot{x}}{2} + \frac{kx^2}{2} + \frac{Ce^{-2\Lambda}}{x}\right) + \frac{\ddot{\xi}x^2}{4} - \frac{\widehat{\xi\dot{\Lambda}}}{4}\, x^2\right] \tag{19}$$

com a equação auxiliar sendo (18b)

(c) $\underline{f = p = \lambda = 0}$.

As equações (15) resolvidas levam neste caso a

$$\begin{aligned} \xi &= \rho^2 \\ h &= \rho^{-1} \end{aligned} \tag{20}$$

onde ρ satisfaz

$$\ddot{\rho} + k(t)\rho = C/\rho^3$$

O invariante que se obtêm da eq. (9) é

$$I_4 = \rho^2\,\frac{\dot{x}^2}{2} - \rho\dot{\rho}x\dot{x} + \frac{x^2\dot{\rho}^2}{2} + \frac{\rho}{x} + \frac{Cx^2}{2\rho^2} \tag{21}$$

para a equação de movimento

$$\ddot{x} = - k(t)x + \frac{\rho^{-1}}{x^2}$$

(ii) Analisemos, agora, uma situação física diversa: o movimento unidimensional de um objeto sob força externa dependente do tempo e na presença de um meio que leva a uma dissipação quadrática com a velocidade. A equação de movimento será, se não levarmos em conta a inversão no sinal da força dissipativa quando houver inversão na velocidade

$$\ddot{x} + \beta\dot{x}^2 + f_1(t) = 0 \tag{22}$$

onde β = constante.
Um lagrangeano para este sistema é

$$L = e^{2\beta x} \left[\frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{f_1}{2\beta}\right] \tag{23}$$

As simetrias geométricas deste lagrangeano obtidas da eq. (8) são

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(t) \\ \eta &= e^{-\beta x}\,\alpha(t) + \dot{\xi}/2\beta \\ g &= \frac{e^{\beta x}}{\beta}\,\dot{\alpha} + \frac{e^{2\beta x}}{4\beta^2}\,\ddot{\xi} + C_1 \end{aligned} \tag{24}$$

onde ξ e α satisfazem

$$\dddot{\xi} + 4\beta f_1\dot{\xi} + 2\beta\dot{f}_1\xi = 0 \tag{25a}$$

$$\ddot{\alpha} + \beta f_1\alpha = 0 \tag{25b}$$

Fazendo 5 = p^2, e integrando a equação para <,obtemos

$$\ddot{\rho} + \beta f_1\rho = c_2/\rho^3 \tag{26}$$

Pela relação (9), e para a escolha $C_1=0$, $C_2=1$, $\alpha=0$, as eqs. (23), (24) e (25) levam ao invariante

$$I_5 = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{2\beta x}}{\beta^2\rho^2} + \frac{e^{2\beta x}}{\beta^2}(\dot{\rho} - \beta\rho\dot{x})^2\right] \tag{27}$$

com equação auxiilar (26).

Outro invariante pode ser obtido escolhendo-se $\xi=0$ e $\alpha\neq 0$, nas eqs. (23), (24) e (25)

$$I_6 = \frac{e^{\beta x}}{\beta}\left[\dot{\alpha} - \beta\alpha\dot{x}\right] \tag{28}$$

com a equação auxiliar

$$\ddot{\alpha} + \beta f_1(t)\alpha = 0 \tag{29}$$

E importante observar que I, é também um invariante para o oscilador dependente do tempo, quando $\beta f_1 = k(t)>0$; podemos, neste caso, ver (22) como a equação auxiliar e (30) como a equação principal.

Vemos que o Teorema de Noether nos dá um método para se obter invariantes e suas equações auxlllares; estas surgem como condições a serem satisfeitas pelas transformações nas coordenadas para serem transformações de simetria do sistema. Os invariantes obtidos estabelecem ligações entre a equação principal e as auxiliares e podem ser usados para se obter as soluções de uma equação em termos de soluções da outra'. Por exemplo, para o caso que estamos considerando, podemos facilmente achar a solução para o movimento de um objeto caindo próximo à superfície da Terra e submetido a uma força de atrito com o ar que depende do quadrado da velocidade. A equação de movimento será a eq. (22) com β constante e $f_1 = - g$

$$\ddot{x} = g - \beta\dot{x}^2 \tag{30}$$

A equação (29) terá a forma

$$\ddot{a} = \beta g \alpha$$

A solução desta equação linear é

$$\alpha = A \exp\{\sqrt{\beta g}t\} + B \exp\{-\sqrt{\beta g}t\} \tag{31}$$

Aplicando a eq. (31) na eq. (28) e fazendo $I_6 = 0$, teremos

$$\dot{x} = \frac{\{A \exp(\sqrt{\beta g}t) - B \exp(-\sqrt{\beta g}t)\}}{\{A \exp(\sqrt{\beta g}t) + B \exp(-\sqrt{\beta g}t)\}}\ \frac{\sqrt{g}}{\beta}$$

Logo a velocidade de queda do objeto será (com $\dot{x}_0 = 0$)

$$v(t) = \dot{x} = \sqrt{\frac{g}{\beta}}\ \mathrm{tgh}\ (\sqrt{\beta g}t) \tag{32}$$

que tem como valor limite para $t\to\infty$: $v_{max} = \sqrt{g/\beta}$.
Integrando-se (32), a posição do objeto ao longo do tempo será

$$x(t) = \frac{1}{\beta} \ln \cosh (\sqrt{\beta g}\, t), \text{ para } x_0 = 0$$

iii) Consideremos a aplicação deste método a um problema em mais de uma dimensão: o movimento de uma partícula carregada em um campo eletromagnético externo. Suporemos que o campo elétrico varia com o tempo e que o campo magnético é constante e normal ao campo elétrico; para maior generalidade suporemos também a partícula submetida a forças restauradoras lineares e anisotrópicas.

Um lagrangeano para este sistema é

$$L = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\dot{y}^2}{2} + \frac{\omega}{2}\left[\dot{y}x - \dot{x}y\right] - \frac{k_1(t)x^2}{2} - \frac{k_2(t)y^2}{2} + h_1(t) + h_2(t)y$$

onde $\omega = \frac{qB_0}{c}$ e $q\vec{E} = h_1\hat{x} + h_2\hat{y}$.

As equações de movimento são

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \omega\dot{y} - k_1x + h_1(t) \\ \ddot{y} &= -\omega\dot{x} - k_2y + h_2(t) \end{aligned} \tag{33}$$

As condições (8) levam a 8 equações diferenciais de primeira ordem, cujas soluções são

$$5 = \xi(t)$$

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{\dot{\xi}x}{2} + \frac{\omega\xi y}{2} + C_1y + f_2(t) \\ \eta_2 &= \frac{\dot{\xi}y}{2} - \frac{\omega\xi x}{2} - C_1x + f_3(t) \end{aligned} \tag{34}$$

$$g = \frac{\ddot{\xi}}{4}(x^2 + y^2) + \frac{\omega}{2}(f_2y - f_3x) + \dot{f}_3y + \dot{f}_2x + f_4(t)$$

onde ξ, f_2, f_3 e f satisfazem

$$\dddot{\xi} + \dot{\xi}(4k_2 + \omega^2) + \xi(2\dot{k}_2) = 0 \tag{35a}$$

$$\dddot{\xi} + \dot{\xi}(4k_1 + \omega^2) + \xi(2\dot{k}_1) = 0 \tag{35b}$$

$$(C_1 + \omega\xi/2)(k_2 - k_1) = 0 \tag{35c}$$

$$\ddot{f}_2 + k_1 f_2 = \omega\dot{f}_3 - h_2(C_1 + \omega\xi/2) + \dot{h}_1\xi + \frac{3}{2} h_1\dot{\xi} \tag{35d}$$

$$\ddot{f}_3 + k_2 f_3 = -\omega\dot{f}_2 + h_1(C_1 + \omega\xi/2) + \dot{h}_2\xi + \frac{3}{2} h_2\dot{\xi} \tag{35e}$$

$$\dot{f}_4 = h_1 f_2 + h_2 f_3 \tag{35f}$$

Dois casos particulares importantes são

(a) $k_1 = k_2 = k(t)$; $h_1 = h_2 = 0$

Trata-se do oscilador isotrópico, carregado, em um campo magnético constante. O sistema de equações (35) fica reduzido a

$$\begin{aligned} &\ddot{\rho} + (k + \omega^2/4)\rho = C/\rho^3 \\ &\ddot{f}_2 + kf_2 = \omega\dot{f}_3 \\ &\ddot{f}_3 + kf_3 = -\omega\dot{f}_2 \end{aligned} \tag{36}$$

onde fizemos $\rho = \xi^2$ e integramos a equação (35a). A expressão invariante obtida das eqs.(34) e (9) será

$$\begin{aligned} I_7 = &\frac{\rho^2}{2}\left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \omega(x\dot{y}-y\dot{x}) + (k+\omega^2/2)(x^2+y^2)\right] - \rho\dot{\rho}(x\dot{x}+y\dot{y}) \\ &+ \frac{(x^2+y^2)}{2}\left[\dot{\rho}^2 - \frac{C}{\rho^3} - \rho(k+\omega^2/4)\right] + C_1\frac{\omega}{2}(x^2+y^2) + C_1(x\dot{y}-y\dot{x}) \\ &+ \omega(f_2 y - f_3 x) + \dot{f}_3 y + \dot{f}_2 x - f_2\dot{x} - f_3\dot{y} \end{aligned} \tag{37}$$

(b) $h_1 \neq 0$, $h_2 \neq 0$; $k_1 = k_2 = k_0 = \text{cte}$

É o caso do oscilador independente do tempo colocado nos campos elétrico (variável) e magnético cruzados. O invariante neste caso será

$$\begin{aligned} I_8 = &\frac{x^2+y^2}{4}(-\Omega^2 C_3 \cos\Omega t - \Omega^2 C_4 \operatorname{sen}\Omega t) + (x\dot{x} + y\dot{y})\left(\frac{\Omega C_3}{2}\cos\Omega t\right. \\ &\left. - \frac{\Omega C_4}{2}\operatorname{sen}\Omega t\right) + \left(\frac{C_2 + C_3\cos\Omega t + C_4\operatorname{sen}\Omega t}{2}\right)\left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \omega(x\dot{y} - y\dot{x})\right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2) + k(x^2+y^2) - 2h_1x - 2h_2y\Big] + \frac{\omega C_1}{2}(x^2+y^2) + C_1(x\dot{y}-y\dot{x})$$

$$+ \omega(f_2y - f_3x) + \dot{f}_3y + \dot{f}_2x - f_2\dot{x} - f_3\dot{y} + \int(h_1f_2 + h_2f_3)\,dt \qquad (38)$$

com f_2, f_3 e f_4 satisfazendo as eqs. (35d), (35e) e (35f) respectivamente e onde

$$\Omega = \left[4k + \omega^2\right]^{1/2}$$

4. OBTENÇÃO DE INVARIANTES A PARTIR DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

Podemos buscar diretamente da equação de movimento as condições para que invariantes de Ermakov existam; para isto faremos suposições gerais sobre o tipo de invariante a ser buscado e, em seguida, analisaremos os tipos de equações auxiliares possíveis neste caso. Consideraremos, como exemplo, a equação de movimento geral para uma partícula em uma dimensão

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}) \qquad (39)$$

e suporemos que o invariante I tem a forma

$$I = I(x, \dot{x}, \rho, \dot{\rho}) \qquad (40)$$

onde ρ satisfaz uma equação auxiliar do tipo

$$\ddot{\rho} = g(t, \rho, \dot{\rho}) \qquad (41)$$

A suposição de que I não tem dependência explícita em t e a utilização de uma única variável auxiliar são as restrições que adotamos neste caso. Além dessas, outra restrição importante feita é supor o não acoplamento das equações (39) e (41).

Sendo I um invariante, deverá satisfazer

$$\dot{x}\frac{\partial I}{\partial x} + \ddot{x}\frac{\partial I}{\partial \dot{x}} + \dot{\rho}\frac{\partial I}{\partial \rho} + \ddot{\rho}\frac{\partial I}{\partial \dot{\rho}} = 0 \qquad (42)$$

Das eqs. (39), (41) e (42) teremos

$$g(t,\rho,\dot{\rho}) = - f\,\frac{\partial I/\partial \dot{x}}{\partial I/\partial \dot{\rho}} - \frac{(\dot{x}\partial I/\partial x + \dot{\rho}\partial I/\partial \rho)}{\partial I/\partial \dot{\rho}} \qquad (43)$$

Esta expressão, cujo segundo membro deve ser uma função somente de t, ρ e $\dot{\rho}$, nos dá a condição geral que I deverá obedecer. Outras condições particulares, dela deduzidas, podem ser Úteis na busca de I e de $g(t, \rho, \dot{\rho})$; por exemplo, derivando a eq. (43) em função de t, x, e $\dot{x}$ encontramos as condições

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial I/\partial \dot{x}}{\partial I/\partial \dot{\rho}} \tag{44}$$

$$\left(\frac{\partial^2 I}{\partial \dot{x}\partial \dot{\rho}}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial t}\frac{\partial I}{\partial \dot{\rho}} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial^2 I}{\partial x\partial \dot{x}}\right) = \left(\frac{\partial^2 I}{\partial x\partial \dot{\rho}}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x}\partial t}\frac{\partial I}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial^2 I}{\partial \dot{x}^2}\right) \tag{45}$$

Aplicando estas condições para o caso do oscilador dependente do tempo, com a equação de movimento (1), e supondo uma forma linear em x e $\dot{x}$ para o invariante

$$I = f_2(\rho)\dot{x} + f_1(\rho,\dot{\rho})x \tag{46}$$

obtemos

$$f_1 = -\dot{\rho}\frac{df_2}{d\rho} \tag{47}$$

Logo a forma deste invariante linear em x e $\dot{x}$ é

$$I_9 = f_2\dot{x} - \dot{\rho}x\frac{df_2}{d\rho} \tag{48}$$

com a equação auxiliar

$$\ddot{\rho} = -\omega^2(t)\frac{f_2}{df_2/d\rho} - \dot{\rho}^2\frac{d^2f_2/d\rho^2}{df_2/d\rho} \tag{49}$$

Se tomamos o caso particular onde $f_2 = e^{\lambda\rho}/\lambda$ chegamos ao invariante I_6, já obtido pelo Teorema de Noether.

Supondo, para o mesmo oscilador, um invariante quadrático em x e $\dot{x}$

$$I = f_3(\rho)\dot{x}^2 + f_4(\rho,\dot{\rho})x\dot{x} + f_5(\rho,\dot{\rho})x^2 \tag{50}$$

as condições (41) e (43) levam a

$$I_{,,} = f_3\dot{x}^2 - \dot{\rho}x\dot{x}\frac{df_3}{d\rho} + f_5(\rho,\dot{\rho})x^2 \tag{51}$$

onde f_5 satisfaz à equação

$$\left(-\dot{\rho}^2\frac{d^2f_3}{d\rho^2} + 2kf_3\right)\frac{\partial f_5}{\partial \rho} + 2f_5\frac{\partial f_5}{\partial \dot{\rho}} + \dot{\rho}\frac{df_3}{d\rho}\frac{\partial f_5}{\partial \rho} + k\dot{\rho}\left(\frac{df_3}{d\rho}\right)^2 = 0 \tag{52}$$

A equação auxiliar é obtida da eq.(43) pela substituição dos valores de f_3, f_4 e f_5.

O invariante original de Ermakov I_0 é obtido para o caso particular $f_3 = \rho^2$.

Esta forma de obtenção dos invariantes de Ermakov nos fornece resultados mais gerais do que a aplicação do Teorema de Noether, mas a sua resolução pode se tornar complicada quando as restrições impostas em I forem relaxadas e quando um número maior de variáveis auxiliares for admitido.

5. CONCLUSÃO

Neste trabalho empregamos o Teorema de Noether para obter invariantes de Ermakov para alguns sistemas dependentes do tempo. A vantagem deste procedimento está em sua simplicidade conceitual: uma vez que as transformações de simetria — que devem obedecer às equações auxiliares para se constituírem em simetrias geométricas — tenham sido obtidas chega-se diretamente aos invariantes. Ele nos fornece, em geral, todos os invariantes independentes para uma certa equação de movimento.

Uma outra possibilidade na busca de novos invariantes seria a utilização do Teorema de Noether aplicado a lagrangeanos equivalentes (lagrangeanos que conduzem às mesmas equações de movimento). Por exemplo, para o oscilador bidimensional dependente do tempo, além do lagrangeano usual

$$L_1 = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\dot{y}^2}{2} - \frac{k(t)}{2}\left[x^2+y^2\right] \tag{53}$$

que utilizamos em forma mais geral no item 3 - iii, um outro lagrangeano

$$L_2 = \dot{x}\dot{y} - k(t)xy \tag{54}$$

conduz às mesmas equações de movimento, A aplicação das condições (8) e (9) a L_2 leva ao seguinte invariante

$$I_{12} = \rho^2\dot{x}\dot{y} - (y\dot{x} + x\dot{y})\rho\dot{\rho} + xy(\dot{\rho}^2 + C/\rho^2) + \dot{f}_2 x + y\dot{f}_3 - f_3\dot{x} - f_2\dot{y} \tag{55}$$

onde

$$\begin{aligned} \ddot{\rho} + k(t)\rho &= C/\rho^3 \\ \ddot{f}_2 + k(t)f_2 &= 0 \\ \ddot{f}_3 + k(t)f_3 &= 0 \end{aligned} \tag{56}$$

Este invariante não pode ser obtido através de uma simetria geométrica do lagrangeano L_1 (só poderá sê-lo através de uma transformação de simetria que envolva as velocidades). Observe-se, de passagem, que este invariante é uma generalização de um dos invariantes de Fradkin para o oscilador harmônico bidimensional[21]

$$I_F = \dot{x}\dot{y} + kxy \;, \quad k = \text{constante}$$

que é considerado, usualmente, como associado a simetrias dinâmicas[22]. Vemos, por este exemplo, que uma quantidade conservada que só pode ser obtida via transformações de simetria dinâmicas para um determinado lagrangeano, pode, eventualmente, estar associada a uma simetria geométrica de um lagrangeano equivalente[20].

O procedimento de se utilizar lagrangeanos equivalentes sofre da dificuldade de que é em geral difícil, e nem sempre possível, especialmente para os casos de dimensão $n>1$, encontrar lagrangeanos equivalentes e que tenham, além disso, uma forma razoavelmente simples.

Um outro processo que poderia ser usado nesta tentativa é a análise das simetrias geométricas das equações de movimento. Estas transformações de simetria formam um grupo (do qual as transformações noetherianas constituem um subgrupo) e, através delas, podem ser obtidas quantidades conservadas[..]; as equações auxiliares surgem novamente como equações a serem satisfeitas para que as transformações contínuas nas coordenadas deixem as equações de movimento invariantes. Este processo, além de poder resultar em invariantes adicionais, tem a vantagem de ser aplicável a sistemas que não admitem formulação variacional.

O exame direto das equações de movimento, como realizado na seção 4, pode levar às formas mais gerais de sistemas de Ermakov. Neste caso teremos, em geral, de fazer suposições sobre a forma do invariante e sobre o tipo das equações auxiliares; isto pode, em muitos casos, levar a condições de difícil resolução. Em todos estes procedimentos obtemos expressões invariantes que, em geral, não serão todas funcionalmente independentes entre si; ao final, os invariantes supérfluos poderão ser eliminados.

A utilidade dos invariantes de Ermakov aqui discutidos, além de sua importância usual como quantidades conservadas, tem dois pontos de interesse especial. O primeiro deles é a possibilidade de ajudar na obtenção de soluções de uma equação diferencial (em geral não linear) a partir de soluções conhecidas da equação auxiliar[9]. O segundo ponto é a utilização destes invariantes na quantização de sistemas físicos com potenciais dependentes do tempo. A análise desta possibilidade nos interessará em trabalho posterior.

REFERENCIAS

1. V.P. Ermakov, Univ. Izv. Kiev. *20*, 1 (1880).
2. E.D. Courant and H.D. Snyder, Ann. Phys. 3, 1 (1958).
3. H.R. Lewis Jr., Phys. Rev. Lett. 18, 510 (1967).
4. H.R. Lewis Jr. and W.B. Riesenfeld, J. Math. Phys. *10*, 1458 (1969).
5. J.R. Ray and J.L. Reid, Phys. Lett. *74*A, 23 (1979).
6. C.J. Eliezer and A. Gray, SIAM J. Appl. Math. 30, 463 (1976).
7. J.R. Burgan, M.R. Feix, E. Fijalkow and A. Munier, Phys. Lett. *74*A, 11 (1979).
8. M. Lutzky, Phys. Lett. *68*A, 3 (1973).
9. J.R. Ray and J.L. Reid, J. Marh. Phys. 20, 2054 (1979).
10. I.C. Yoreira, An. Acad. Bras. Cien. 54, 477 (1982).
11. D.C. Khandekar and S.V. Lawande, J.Math.Phys. *20*, 1870 (1979).
12. J.G. Hartley and J.R. Ray, Phys. Rev. D 25, 382 (1982).
13. E.L. Hill, Rev. Mod. Phys. 23, 253 (1951).
14. J.R. Ray, Prog. Theor. Phys. 65, 877 (1981).
15. E. Noether, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.Phys.:Kl, 11, 235 (1918).
16. F. Cantrijn and W. Sarlet, SIAM Review 23, 467 (1981).
17. G.W. Bluman and J.D. Cole, *Similarity Methods for Differential Equations* (New York, Springer - Verlag, 1974).
18. I.C. Moreira, "Simetrias de Lie para a Partícula em Campo Magnético", apresentado na Reunião Anual da SBPC - 1983.
19. R.M. Santilli, *Foundations of Theoretical Mechanics*, Vol.1 (New York, Springer - Verlag, 1978).
20. I.C. Moreira, "Lagrangeanos Equivalentes e Constantes de Movimentos", em preparação, UFRJ.
21. D.M. Fradkin, Am.J.Phys. 33, 207 (1965).
22. J.M. Levy-Leblond, Am.J.Phys. 39, 502 (1971).

We apply here the Noether Theorem for the obtention of invariants for Ermakov systems. We give also another method for finding these invariants starting directly from the equations of motion. Some illustrative examples, in the onedimensional and twodimensional cases, are given.