Revista Brasileira de Física, Volume 13, n? 1, 1983

Uma Solução Exata em Einstein-Cartan

W. L. ROQUE* e A. F. DA F. TEIXEIRA

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rua Xavier Sigaud, 150, Rio de Janeiro, 22290, RJ, Brasil

Recebido em *26* de janeiro de 1983

Resumo A solução exata das equações de Einstein-Cartan é obtida para um fluido artificial com spins radialmente polarizados, sob simetria esférica e em condição estática, sendo nulo o tensor métrico de energia-momento. A dinâmica gravitacional é estudada para diversas intensidades da torção (ou spin do fluido), através do movimento de partículas teste sem spin; em particular, para torção nula reobtem-se a solução de Schwarzschild. Observa-se que 2s efeitos gravitacionais associados 2 torção ora são atrativos ora são repulsivos, dependendo dos valores do spin do fluido e da posiçao e velocidade da partícula teste.

1. INTRODUÇÃO

Em 1922 Elie Cartan sugeriu um modelo para a geometria do espaço-tempo no qual as afinidades seriam assimétricas; a parte antissimétrica, denominada de torção, estaria de algum modo relacionada ao momento angular intrínseco (spin) das partículas. A conexão da assim chamada Teoria de Einstein-Cartan[1] tem a forma

$$\Gamma^{k}_{ij} = \{^{k}_{ij}\} - K_{ij}{}^{k}$$

onde $\{^{k}_{ij}\}$ é o símbolo de Christoffel e $K_{ij}{}^{k}$ é o tensor de contorção: este é definido em termos do tensor de torção $S_{ij}{}^{k}$ segundo

$$K_{ij}{}^{k} = - S_{ij}{}^{k} + S_{j}{}^{k}{}_{i} - S^{k}{}_{ij}, \tag{1.2}$$

sendo

$$S_{ij}{}^{k} = \frac{1}{2}\,(\Gamma^{k}_{ij} - \Gamma^{k}_{ji}) = \Gamma^{k}_{[ij]} \tag{1.3}$$

Nesta geometria a métrica g_{ij} é simêtrica e satisfaz o postulado métrico

$$\overset{\Gamma}{\nabla}_{k}\, g_{ij} = 0. \tag{1.4}$$

É sabido que a gravitação gerada pela densidade de matéria é

*Present adress: Department Applied Maths., Univ. of Cape Town, Rondebosch 7700, Cape Town-South Africa.

usualmente muito mais intensa que a gerada pelo spin, geralmente desordenado, do material. No caso dos spins estarem alinhados, entretanto, sua contribuição cresce extraordinariamente por efeito de coerência, e pode competir em valor com a contribuição da matéria[2].

2. EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS

A equação combinada da Teoria de Einstein-Cartan é[1]

$$G^{ij}(\{\ \}) = 8\pi\tilde{\sigma}^{ij} = 8\pi\sigma^{ij} + (8\pi)^2 \left[-4t^{ik}{}_{[m}t^{jm}{}_{k]} - 2t^{ikm}t^{j}{}_{km} + t^{kmi}t_{km}{}^{j} + \frac{1}{2}g^{ij}(4t_{k}{}^{m}{}_{[n}t^{kn}{}_{m]} + t^{kmn}t_{kmn})\right], \qquad (2.1)$$

onde $G^{ij}(\{\ \})$ é o tensor de Einstein da Relatividade Geral, $\tilde{\sigma}^{ij}$ é o tensor de energia-momento combinado, σ^{ij} é o tensor métrico de energia-momento e t^{ijk} é o tensor de spin. A Relatividade Geral é reobtida quando $t^{ijk} = 0$.

É nosso propósito investigar os efeitos gravitacionais associados ao spin, desvencilhados tanto quanto possível da gravitação associada a outras fontes. Como hipótese de trabalho admitimos que $\sigma^{ij} = 0$ na (2.1), isto significando que supomos a gravitação proveniente de σ^{ij} desprezível em comparação à proveniente dos termos quadráticos no spin. Dois exemplos de materiais com $\sigma^{ij} = 0$ são apresentados no Apêndice.

3. MÉTRICA E SPIN; SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES

A métrica estática com simetria esférica é descrita por

$$ds^2 = e^{2\eta(r)}dt^2 - e^{2\lambda(r)}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\text{sen}^2\theta\, d\phi^2; \qquad (3.1)$$

quando alinhados radialmente, os spins das partículas que compõem o material tornam não nulas unicamente as componentes do tensor de spin

$$t_{23}{}^{0} = - t_{32}{}^{0} = \frac{1}{8\pi}\alpha(r)\,\text{sen}\theta\ . \qquad (3.2)$$

As equações de campo independentes são então

$$G^0_0 - 8\pi\tilde{\sigma}^0_0 = (2r^{-1}\lambda' - r^{-2})e^{-2\lambda} + r^{-2} - 3r^{-4}\alpha^2e^{2\eta} = 0\ , \qquad (3.3)$$

$$G^1_1 - 8\pi\tilde{\sigma}^1_1 = -(2r^{-1}\eta' + r^{-2})e^{-2\lambda} + r^{-2} - r^{-4}\alpha^2e^{2\eta} = 0\ , \qquad (3.4)$$

$$G^2_2 - 8\pi\tilde{\sigma}^2_2 = -(\eta'' + \eta'^2 - \eta'\lambda' + r^{-1}\eta' - r^{-1}\lambda')e^{-2\lambda} + r^{-4}\alpha^2e^{2\eta} = 0, \qquad (3.5)$$

onde a plica denota d/dr.

Fazendo uso das identidades de Bianchi concluimos que

$$\alpha(r) = \text{const} = \pm a \quad , \quad \text{com } a \geqslant 0 \ . \tag{3.6}$$

Considerando o resultado acima, de (3.3) e (3.4) obtemos

$$e^{2\eta} = 1 + 2a^2r^{-2} - 2mr^{-1}(1 + a^2r^{-2})^{1/2} \ , \tag{3.7}$$

$$e^{-2\lambda} = (1 + a^2r^{-2})e^{2\eta} \ , \tag{3.8}$$

onde m é uma constante de integração que representa a massa do sistema. Observamos que para a = 0 (spin nulo) a solução reduz-se à Schwarzschild.

4. ANÁLISE DA SOLUÇÃO; CONCLUSÕES

Da (3.7) notamos que para $r \to \infty$ se tem o comportamento Newtoniano $\eta(r) \to -m/r$, para todos os valores de $a/m < \infty$. Para a=0 se tem $\eta \to \infty$ quando $r \to 2m$, correspondendo ao raio de Schwarzschild. Para a crescendo de 0 a m, a localização radial da assíntota recede gradualmente de $r=2m$ até $r=0$. Para $a>m$ há um poço finito de potencial, com valor mínimo $\eta(r_0) = \ln(1 - m^2/a^2)^{1/4}$.

Para melhor visualização dessa gravitação, acompanhamos o movimento radial de uma partícula teste sem spin. Usamos a definição de velocidade encontrada em Horedti[3]

$$U^0 \ U_0 = [1 - v^2(r)]^{-1}, \tag{4.1}$$

onde $U^0 = dx^0/ds$ e $v(r)$ é a velocidade da partícula; para uma partícula teste que parte do repouso no infinito e sofre queda livre radial obtemos

$$v^2(r) = 2\left[mr^{-1} (1 + a^2r^{-2})^{1/2} - a^2r^{-2}\right]. \tag{4.2}$$

Notamos que $v(r) \to (2m/r)^{1/2}$ quando $r \to \infty$, que é o resultado Newtoniano. Para $a<m$ tem-se $v \to \infty$ quando $r \to 0$. Para $a=m$ tem-se $v=c$ em $r=0$. Para $a>m$ a partícula aumenta gradualmente sua velocidade de queda até um valor máximo, subluminal, é a seguir freiada até o repouso em $r=a(a^2/m^2 - 1)^{1/2}$, e retorna ao infinito. Estes resultados evidenciam substancial alteração da gravitação Schwarzchildeana em decorrência da polarização do material.

De modo mais completo, o campo gravitacional inserido pelo spin polarizado pode ser inferido dos termos que compõem a aceleração

$$\ddot{r} = -E^2\eta' e^{2\gamma} + (\eta' + \gamma')\dot{r}^2 + L^2 r^{-3} e^{2(\eta+\gamma)} , \qquad (4.3)$$

onde $e^{2\gamma} = 1 + a^2/r^2$, e onde E e L são constantes de movimento associadas à energia total e ao momento angular orbital da partícula teste sem spin; o ponto superescrito indica d/ds.

O primeiro termo do segundo membro corresponde à gravitação que atua sobre uma partícula em repouso. Partindo da (3.7), uma análise do termo nos faz concluir que a densidade de spin do material age sobre as partículas sem spin em repouso no sentido de lhes enfraquecer a atração estática Schwarzschildeana (a=0), tanto a longa como a curta distância do centro de simetria. Ademais, a curta distância os efeitos repulsivos da torção às vezes superam os efeitos atrativos de Schwarzschild, daí podendo resultar um efeito total repulsivo sobre a partícula teste.

O segundo termo corresponde à contribuição associada ao quadrado da componente radial $\dot{r}$ da velocidade, e não tem análogo Newtoniano. Neste caso a densidade de spin atuou no sentido de enfraquecer a repulsão Schwarzschildeana associada ao movimento radial da partícula teste sem spin, chegando a atrair quando $a/m > 1$ estando a partícula suficientemente próxima do centro de simetria.

Finalmente, o terceiro termo de $\ddot{r}$ corresponde às contribuições azimutais. A densidade de spin, neste caso, induziu um esforço à atuação repulsiva encontrada no análoqo Schwarzschildeano.

Considerando as diferentes contribuições destes três termos, concluimos que o efeito global da gravitação proveniente da densidade de spin tanto pode ser de atração como repulsão da partícula teste, dependendo da sua localização e velocidade. Ainda, vemos que a gravitação induzida no sistema pelo spin polarizado difere sensivelmente da gravitação Einsteiniana, sobretudo quando o parâmetro a do spin for maior que o parâmetro m da massa.

Um de nós (WLR) expressa sua profunda gratidão a AMT Rodrigues pelo constante estímulo durante a realização do trabalho.

APÊNDICE: MATERIAIS COM $\sigma^{ij} = 0$

Um primeiro exemplo de material com $\sigma^{ij} = 0$ é um fluido de Weyssenhoff[1] eletricamente carregado, em repouso, de densidade $\rho(r)$ e pressão isotrópica $p(r)$: então

$$\sigma^i_j = (\rho+p)u^i u_j - p\delta^i_j - \overset{\Gamma}{\nabla}_k(t^{ki}{}_j + t^k{}_j{}^i) + \frac{1}{4\pi}(F^i{}_k F^k{}_j - \frac{1}{4}\delta^i_j F^m{}_k F^k{}_m) , \tag{A.1}$$

sendo

$$u^k = \delta^k_0 e^{-\eta(r)} , \quad F_{km} = A_{m,k} - A_{k,m} , \quad A_k = \delta^0_k \phi(r) , \tag{A.2}$$

a vírgula subscrita indicando derivação ordinária. As únicas componentes não nulas são

$$\sigma^0_0 = \rho - 2\Sigma^2 + \varepsilon^2 , \quad \sigma^1_1 = -p + \varepsilon^2 , \tag{A.3}$$

$$\sigma^2_2 = \sigma^3_3 = -p + \Sigma^2 - \varepsilon^2 , \tag{A.4}$$

onde

$$\varepsilon^2 = (1 + a^2 r^{-2})\phi'^2/8\pi , \quad \Sigma^2 = (a/r^2)^2 e^{2\eta}/4\pi . \tag{A.5}$$

Teremos então $\sigma^{ij} = 0$ quando

$$\rho/3 = p = \varepsilon^2 = \Sigma^2/2 . \tag{A. 6}$$

É fácil verificar pela 2ª das (A.5) que essas grandezas todas tendem a zero no infinito radial.

Outro exemplo é um fluido que só difere do anterior por ser carregado escalarmente e não eletricamente. O campo escalar repulsivo $\phi(r)$ contribui para σ^i_j com uma parcela

$$\sigma^{esc}_{ij} = -(\phi_{,i}\phi_{,j} - \frac{1}{2}g_{ij}\phi^{,k}\phi_{,k})/4\pi ; \tag{A.7}$$

teremos então $\sigma^{ij} = 0$ quando

$$\rho/5 = p = \Sigma^2/2 = e^{-2\lambda}\phi'^2/8\pi \tag{A.8}$$

Também este fluido evanesce no infinito radial.

REFERÊNCIAS

1. Hehl, F.H., *et al.*, Rev. Mod. Phys. 48, 393-416 (1976).

2. Hehl, F.H. e von der Heyde, P., Ann. Inst. Henri Poincaré *XIX*, 179-196 (1973).

3. Horedti, Gp., Gen. Rel. Grav. 5, 475-477 (1974).

4. Roque, W.L., Tese de Mestrado CBPF/CNPq-Rio de Janeiro (1982).

ABSTRACT

The exact solution of Einstein-Cartan fieldequations is obtained foran artificial fluid with radially polarized spins, spherically symmetric and under static condition; the energy-momentum metric tensor is taken as zero. The gravitational dynamics is studied for various intensities of torsion (or fluid spin), through the analysis of motion of spinless test particles; in particular, for vanishing torsion we re-obtain the Schwarzschild solution. The gravitational effects related to torsion are found sometimes attractive, spmetimes repulsive, depending on the value of spin density and on the position and velocity of the test particle.