Revista Brasileira de Física, Volume 13, n? 1, 1983

# Simetria SU(4) no Modelo de Bósons S-P Interatuantes com Isospin

A. R. SALVETTI

*Departamento de Física, Química, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Caixa Postal 649, Campo Grande, 79100, MS, Brasil*

Recebido em 20 de novembro de 1982

**Resumo** Consideramos um modelo de bósons interatuantes com isospin que abrange bósons $s$ isovetoriais (J=O, T=l) e bósons $p$ isoescalares (&l, T=O). Tal sistema é representado pelo grupo u,(JT), que entre outros, possui os subgrupos u~(J), u~(T)e SU(4). No presente trabalho, pr'opomos interações dependentes de isospin, de forma a obter a Hamiltoniana escrita em termos de operadores diagonais nos subgrupos acima especificados e aplicamos os resultados obtidos para simetria ~~(4), núcleos reais.

## 1. INTRODUÇÃO

O modelo de bósons interatuantes proposto por A. Arima e F. Iachello[1], considerava o núcleo como sendo formado por bósons $s$ ($\ell$=0) e bósons $d$ ($\ell$=2), tendo seus estados de muitos bósons, classificados de acordo com o grupo $U_6(sd)$. Tal modelo foi acrescido por J. P. Elliott[2], do uso de spin intrínsico ($S$) e isospin (T), podendo ter seus estados de muitos bosons, classificados pelo produto de grupos $U_6(TS)\times U_6(sd)$. Por outro lado C.H.T. Chen[3] introduzia bósons $p$ ($\ell$=1) aos bosons $s$ e $d$ de Arima e Iachello e considerava a presença de isospin ($T$).

Neste trabalho, nos restringiremos à análise de um modelo que envolve dois tipos de bósons, ou seja, bósons s ($J$=0, $T$=1) e bósons $p$($J$=1, $T$=0), onde J é o momento angular total. O grupo que representa um estado de $N$-bósons para esse sistema, é o grupo $U_6(JT)$, que se visto como $J$=$S$, teríamos um caso particular do modelo de Elliott, isto é, estaríamos considerando apenas bosons com $\ell$=0.

O grupo $U_6(JT)$, pode ser decomposto, entre outras formas, como:

$$U_6(JT) \supset U_3(J)\times U_3(T)$$

$$U_6(JT) \supset SU(4) \supset SU_2(T)\times SU_2(J)$$

Se considerássemos um sistema de bósons $p$, teríamos coma representação o grupo $U_3(J)$; para um sistema de bósons $s$ teríamos como representação o grupo $U_3(T)$. O grupo $SU(4)$ surge ao considerarmos bósons $s$ e $p$, com uma interação dependente de isospin, que atua de forma análoga nos espaços de carga e de momento angular. Escreveremos a Hamiltoniana de um e dois corpos, em termos de operadores diagonais no grupo $SU(4)$ e aplicaremos os autovalores de energia obtidos, para núcleos reais, tais como $^{12}C_6$ e $^{28}Si_{14}$.

## 2. INTERAÇÃO INDEPENDENTE DE ISOSPIN

Seja a Hamiltoniana de um e dois corpos

$$H = H_1 + H_2 = \sum_{i,j} \langle i|W|j\rangle\, b_i^+ b^j + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,\ell} \langle ij|V_{12}|k\ell\rangle\, b_i^+ b_j^+ b^\ell b^k \tag{1}$$

Se considerarmos uma interação independente *de* isospin do tipo:

$$\langle j_1 m_1, j_2 m_2|V_{12}|j_1 m_1', j_2 m_2'\rangle = \sum_{J=0} C^{j_1 J j_1}_{0\,0\,0} C^{j_2 J j_2}_{0\,0\,0} R^J(j_1 j_2, j_1 j_2) \cdot$$

$$\cdot \sum_{M=J}^{-J} (-1)^M C^{j_1 J j_1}_{m_1' M m_1} C^{j_2 J j_2}_{m_2' -M m_2} \tag{2}$$

a Hamiltoniana $(H)$, com a interação acima, pode ser escrita como:

$$H = E_s N_{01} + E_p N_{,,} + \frac{1}{2} R^0(00,00)\, N_{01}(N_{01} - 1) + \frac{1}{2} R^0(11,11) N_{10}(N_{10}-1)$$

$$+ \frac{1}{2} R^0(10,10) N_{10} N_{01} + \frac{1}{2} R^0(01,01) N_{01} N_{10} + \frac{1}{25} R^2(11,11) \Big[ 3G_{10} +$$

$$- \frac{3}{2} J^2 - (N_{10})^2 - 5 N_{10} \Big] \tag{3}$$

onde:

$$N_{01} = N_s = U^{0\,0}_{0\,0}(00,11) = \text{número de bósons } s$$

$$N_{10} = N_p = U^{0\,0}_{0\,0}(11,00) = \text{números de bósons } p$$

$$N = N_s + N_p = \text{número total de bósons}$$

$$E_s = \langle 01|W|01\rangle$$

$$E_p = \langle 10|W|10\rangle$$

$$G_{10} = \frac{5}{3}\sum_{M=2}^{-2} (-1)^M U^{2\,0}_{M\,0}(11,00)\, U^{2\,0}_{-M\,0}(11,00) + \frac{J^2}{2} + \frac{(N_{10})^2}{3} \qquad (4)$$

$G_{10}$ = Operador de Casimir do grupo $U_3(J)$

$$U^{J\,T}_{M\,M_T}(jj',tt') = \sum_{\substack{m,m'\\ m_t,m_t'}} C^{j'\,J\,j}_{m'\,M\,m}\, C^{t'\,T\,t}_{m_t'M_T m_t}\, b^{+}_{jmtm_t}\, b^{j'm't'm_t'} \qquad (5)$$

$$J_M = (2)^{1/2}\, U^{1\,0}_{M\,0}(11,00) \qquad (6)$$

$b^{+}_{jmtm_t}$ = operador de criação de bósons no estado definido por $jmtm_t$

$b^{jmtm_t}$ = operador de aniquilação de bósons no estado definido por $jmtm_t$

Podemos conseguir para uma determinada escolha de parâmetros, a Hamiltoniana:

$$H = N_{01}.a + (N_{01})^2.b + N_{01}N.c + N_{10}.a' + (N_{10})^2.b' + N_{10}N.c' + $$
$$+ (G_{10} - \frac{J^2}{2}).d$$

onde, neste! caso, escolhemos:

$$a = E_s + b + c \qquad a' = E_p + b' - \frac{4}{3} d + c'$$

$$b = \frac{1}{2} R^0(00,00) - c \qquad b' = \frac{1}{2} R^0(11,11) - \frac{1}{3} d - c'$$

$$c = \frac{1}{2} R^0(01,01) \qquad c' = \frac{1}{2} R^0(10,10)$$

$$d = \frac{3}{25} R^0(11,11)$$

Dessa forma, vemos que para a interação independente de isospin a Hamiltoniana aparece como combinação linear de operadores diagonais nas bases $U_3(J)$ e $U_3(T)$.

### 3. INTERAÇÃO DEPENDENTE DE ISOSPIN

Quando consideramos uma interação em nosso sistema de bósons, que atua de forma similar no espaço de carga e no espaço de momento angular, da forma:

$$V_{12} = \sum_{J,T} V_J U_T \tag{7}$$

onde

$$<j_1m_1, j_2m_2|V_J|j_1'm_1', j_2'm_2'> = \left[\frac{(2j_1' + 1)(2j_2' + 1)}{(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)}\right]^{1/2} C^{j_1' J j_1}_{0\ 0\ 0} \cdot$$

$$\cdot C^{j_2' J j_2}_{0\ 0\ 0} v_J(j_1j_2;j_1'j_2') \sum_{M=J}^{-J} (-1)^M C^{j_1' J j_1}_{m_1' -M m_1} C^{j_2' J j_2}_{m_2' M m_2}$$

$$<t_1m_{t_1}, t_2m_{t_2} |U_T| t_1'm_{t_1}', t_2'm_{t_2}'> = \left[\frac{(2t_1' + 1)(2t_2' + 1)}{(2t_1 + 1)(2t_2 + 1)}\right]^{1/2} C^{t_1' T t_1}_{0\ 0\ 0} \cdot$$

$$\cdot C^{t_2' T t_2}_{0\ 0\ 0} u_T(t_1t_2;t_1't_2') \sum_{M_T=T}^{-T} (-1)^{M_T} C^{t_1' T t_1}_{m_1' M_T m_{t_1}} C^{t_2' T t_2}_{m_{t_2}' -M_T m_{t_2}} \tag{8}$$

Obtemos que a Hamiltoniana de dois corpos, pode ser escrita como:

$$H_2 = \frac{1}{2} v_0(00,00)u_0(11,11)N_{01}(N_{01}-1) + \frac{1}{2} v_0(11,11)u_0(00,00)N_{10}(N_{10}-1)+$$

$$+ \frac{1}{25} v_0(00,00)u_2(11,11)(3G_{01} - \frac{3}{2} T^2 - (N_{01})^2 - 5N_{01}) +$$

$$+ \frac{1}{25} v_2(11,11)u_0(00,00)(3G_{10} - \frac{3}{2} J^2 - (N_{10})^2 - 5N_{10}) +$$

$$+ v_0(11,00)u_0(00,11)N_{01}N_{10} + \frac{1}{6} v_1(11,00)u_1(00,11) (\frac{A^2}{3} - N_{01} - N_{10}) \tag{9}$$

onde:

$$G_{01} = \frac{5}{3} \sum_{M_T=2}^{-2} (-1)^{M_T} U^{0\ 2}_{0\ M_T}(00,11) U^{0\ 2}_{0\ -M_T}(00,11) + \frac{T^2}{2} + \frac{(N_{01})^2}{3} \tag{10}$$

$$A_{JT} = -(3)^{1/2} (U^{1\ 1}_{M\ M_T}(10,01) + U^{1\ 1}_{M\ M_T}(01,10)) \tag{11}$$

$$T_{M_T} = (2)^{1/2} U^{0\ 1}_{0\ M_T}(00,11) \tag{12}$$

$G_{01}$ = Operador de Casimir do grupo $U_3(T)$

$$C = K(A^2 - J^2 - T^2) = \text{Operador de Casimir do grupo } SU(4) \tag{13}$$

Como:

$$H = H_1 + H_2 \quad \text{com} \quad H_1 = E_s N_s + E_p N_p \tag{14}$$

Podemos ver que a Hamiltoniana de nosso sistema, pode ser escrita em termos de operadores diagonais nos grupos $U_3(T)$, $U_3(J)$ e $SU(4)$.

Se considerarmos, por exemplo,

$$E_s = v_0(00,00) = v_0(11,00) = v_1(11,00) = 0$$

teremos a Hemiltoniana escrita em termos de operadores diagonais no grupo $U_3(J)$.

Se considerarmos, por exemplo,

$$E_p = u_0(00,00) = v_0(11,00) = v_1(11,00) = 0$$

teremos a Hamiltoniana escrita em termos de operadores diagonais no grupo $U_3(T)$.

## 4. A SIMETRIA SU(4)

Consideremos o caso em que a Hamiltoniana é diagonal no grupo $SU(4)$. Para tal, podemos fazer, por exemplo:

$$v_0(00,00) = u_0(00,00) = v_0(11,00) = 0$$

$$6E_s = 6E_p = v_1(11,00)u_1(00,11) = 18K_3'$$

com o que obtemos

$$H = K_3'.A^2 \tag{15}$$

como o operador de Casimir do grupo $SU(4)$ é dado por:

$$C = K(A^2 - J^2 - T^2) \tag{16}$$

e tem auto valor:

$$C = 3p(p+4) + 4q(q+4) + 3r(r+4) + 4q(p+r) + 2pr \tag{17}$$

onde:

$$p = N_1 - N_2, \quad q = N_2 - N_3, \quad r = N_3 - N_4 \tag{18}$$

para:

$(N_1, N_2, N_3, N_4)$ = Diagrama de Young

obtemos que a energia na base $SU(4)$ pode ser dada por:

$$E = \frac{K_3'}{K} \left(3p(p+4) + 4q(q+4) + 3r(r+4) + 4q(p+r) + 2pr\right) +$$

$$+ K_3'\left(T(T+1) + J(J+1)\right) \qquad (19)$$

Podemos classificar os estados de bósons $s$ e bósons $p$ de acordo com a cadeia de grupo

$$U_6(JT) \supset SU(4) \supset SU_2(J) \times SU_2(T)$$

pela tabela abaixo:

Tabela 1

| $N$ | $U_6(JT)$ | $SU(4)$ $(pqr)$ | $SU(4)$ $(N_1N_2N_3N_4)$ | $C$ | $(J\ T)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | (1) | (010) | (11) | 20 | (01) (10) |
| 2 | (2) | (000) | (1111) | 0 | (00) |
| | | (020) | (22) | 48 | (00) (02) (11) (20) |
| 3 | (3) | (010) | (2211) | 20 | (01) (10) |
| | | (030) | (33) | 84 | (01) (03) (10) (12) (21) (30) |
| 4 | (4) | (000) | (2222) | 0 | (00) |
| | | (020) | (3311) | 48 | (00) (02) (11) (20) |
| | | (040) | (44) | 128 | (00) (02) (04) (11) (13) (20) (22) (31) (40) |

A tabela acima, está restrita ao caso onde a simetria do grupo $U_6(JT)$, é rotulada por uma partição totalmente simétrica, pois trata-se de um sistema de bosons.

## 5. APLICAÇÃO A NÚCLEOS REAIS

No limite de $SU(4)$, dado pela equação (19), não obtemos bons resultados ao tentarmos reproduzir espectros experimentais, pois pela classificação da tabela (1), teríamos estados degenerados ao trocarmos os valores de spin e isospin, por exemplo, a energia de um estado com $J=4$, $T=0$, deveria ser a mesma que a energia de um estado com $T=4$, $J=0$.

Como no modelo de bósons, procuramos a simetria de um determinado sisteina, através da parametrização da interação, poderíamos tentar manter a simetria $SU(4)$ desejada, mas permitir que os autovalores de energia fossem do tipo:

$$E = K_1(3p(p+4)+4q(q+4)+3r(r+4)+4q(p+r)+2pr) + K_2T(T+1)+K_3J(J+1) \qquad (20)$$

por meio de uma escolha diferente da interação e de sua parametrização. Todavia mesmo tendo possibilidade de levantar a degenerescência da energia apresentada na eq. (19), entre estados que tem momento angular e isospin trocados, ainda teríamos problemas difíceis de solucionar. Vejamos o caso do $^{12}C_6$ (fig. 1) onde aparentemente temos boa concordância entre os espectros teórico e experimental, contudo temos problemas com alguns níveis de energia tais como: $E(1(0)20)$, $E(0(1)20)$ e $E(0(2)48)$ que não apresentam correspondentes experimentais, e por estarem numa faixa em que os mesmos estão bem definidos, são significativos.

A classificação dos níveis, foi feita usando-se a tabela (1) e o cálculo das respectivas energias, rotuladas por $E(J(T)\hat{C})$, através da fórmula (2). Nossa justificativa, para permitir que o número de bósons varie, vem de considerarmos a energia dos bósons desprezíveis frente a interação entre os mesmos, isto é, poderíamos permitir que aparecessem termos do tipo $K_4.N$ e $K_5.N^2$ na Hamiltoniana com simetria $SU(4)$ para depois consiclerarmos $K_4 = K_5 = 0$. Os parâmetros usados, no $^{12}C_6$, foram: $K_1 = 0,17$, $K_2 = 1,69$ e $K_3 = -0,38$; obtidos através do ajuste dos níveis: $E(4^+(0)) = E(4(0)128) = 14,08$ MeV, $E(2^+(0)) = E(2(0)128) = 19,40$ MeV e $E(3^+(1)) = E(3(1)128) = 20,50$ MeV.

Consideramos também o caso de $^{28}Si_{14}$, como sendo formado por um caroço de $^{16}O_8$ adicionado de seis bósons de valência. O espectro obtido (fig.2) novamente apresenta alguns níveis de energia teóricos sem os respectivos correspondentes experimentais, como os níveis rotulados por:

$E(0(0)48)$, $E(2(0)128)$ e $E(1(1)48)$. Os parâmetros usados foram: $K_1=0{,}027$, $K_2 = 2{,}31$ e $K_3 = 0{,}064$: obtidos ao ajustarmos os níveis: $E(1^+(1)) = E(1(1)240) = 11{,}45$ MeV, $E(5^-(1)) = E(5(1)240) = 13{,}25$ MeV e $E(0^+(2)) = E(0(2)48) = 15{,}22$ MeV.

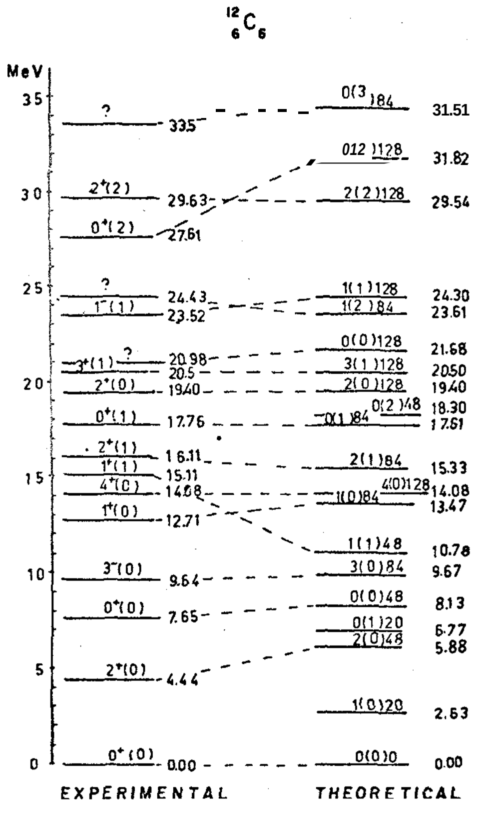


Fig. 1 - Espectros experimental e teórico do $^{12}C_6$ usando a simetria SU(4) do modelo de bósons S-P interatuantes com isospin.

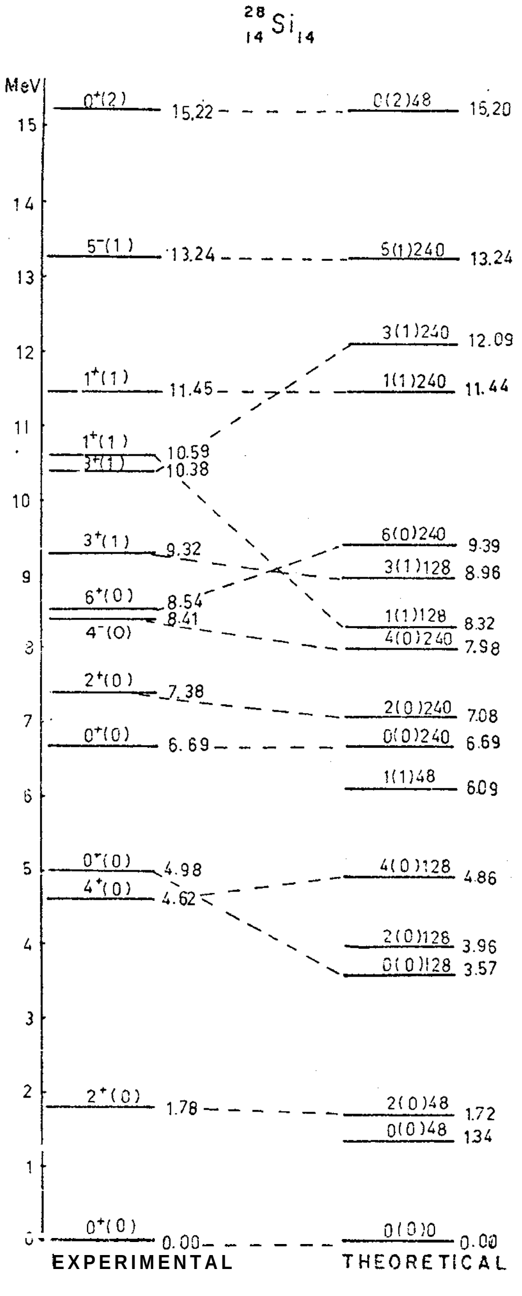


Fig.2 - Espectros experimental e teórico do $^{28}Si_{14}$ usando a simetria SU(4) do modelo de bósons S-P interatuantes com isospin.

Poderíamos pensar em ajustar os dois ou três primeiros níveis dos núcleos considerados, para baixos valores do operador de Casimir $(\hat{C})$, sem todavia poder então o modelo ser conclusivo, pois as previsões teóricas estariam a energias muito altas, onde tal é a quantidade de níveis que não nos seria difícil achar correspondentes experimentais, que concordassem com os valores teóricos.

Agradeço ao Prof. A.F.R. de Toledo Piza pelos comentários bastante Úteis.

## REFERÊNCIAS

1. A.Arima and Iachello, Annals of Physics 99, 253-317 (1976). A. Arima and Iachello, Annals of Physics *111*, 201-238 (1977).

2. J.P.Elliott and J.A. Evand, Physics Letters 2018, 216 (1981)

3. C.H.T. Chen, Modelo de Bosons - sp Interatuantes com Isospin, Tese apresentada no Instituto de Física da Universidade de São Paulo (1981).

## ABSTRACT

We consider and interacting boson model with isospin that include isovector $s$-boson $(J=0,\ T=1)$ and isoscalar p-boson $(J=1,\ T=0)$. Such a systern is represented by the group $U_6(JT)$ which among others, has the sub-groups $U_3(J)$, $U_3(T)$ and $SU(4)$. In the present work we propose isospin dependent and isospin independent interactions, so as to obtain the Hamiltonian in terms of diagonal operators in the sub-groups above specified; and we apply to real nuclei the results for the $SU(4)$ symmetry.