

Estrutura Hiperfina do Muonium: Uma Solução Analítica para Cálculos Perturbativos

CLÓVIS J. WOTZASEK, MIGUEL ANGEL GREGORIO, SUZANA REINECKE

Instituto de Física da UFRJ

P. O. Box: 68.528 – Ilha do Fundão Rio de Janeiro – Brasil

Recebido em 6/7/82

We compute the purely coulombian contribution to the terms of order $E_F(\alpha^2 m_e/m_\mu) \ln \alpha^{-1}$ of the hyperfine splitting of muonium. Results agree with those of other authors. The goal of the work was twofold: first, to confirm that contribution; second, and perhaps more important, to check the analytic solution of the relativistic coulombian problem of the Bethe-Salpeter equation with instantaneous kernel.

São feitos os cálculos das contribuições puramente coulombianas para os termos da ordem $E_F(\alpha^2 m_e/m_\mu) \ln \alpha^{-1}$ da separação hiperfina do muonium. Os resultados obtidos concordam com o de outros autores. O objetivo do trabalho foi duplo: primeiro para verificar aquela contribuição, e segundo e talvez mais importante é o teste que se faz da solução analítica do problema coulombiano relativístico, proposto com a equação de Bethe-Salpeter com núcleo instantâneo.

1. INTRODUÇÃO

Os sistemas positronium ($e^+ e^-$) e muonium ($\mu^+ e^-$) representam os átomos mais puros do ponto de vista da interação, pois são estados ligados (instáveis) de dois leptons. Vem daí que seu estudo tanto teórico quanto experimental constitui um forte teste da teoria dos estados ligados em Teoria de Campos, e das técnicas do cálculo perturbativo. O

nosso principal interesse está no cálculo da separação hiperfina do estado fundamental (EHF), pois esta grandeza é conhecida experimentalmente com grande precisão:

$$A_v = (4463,30235 \pm 52.10^{-5}) \text{ MHz}$$

para o muonium e

$$A_v = (203,3849 \pm 12.10^{-4}) \text{ GHz}$$

para o positronium, como apreciamos são números conhecidos com uma precisão de 1 ppm ou melhor. Reproduzir teoricamente estes números com igual precisão requer o cálculo completo de termos da ordem (relativa à energia de Fermi, $E_F = 8/3 \alpha^4 m_R^3 / m_1 m_2$) a^3 e $a^2 m_e / m_\mu$ para o muonium e α^2 e a^3 para o positronium. O caso do muonium está sendo calculado por Bodwin, Yennie e Gregorio¹ e o resultado será brevemente publicado.

Os termos desta ordem atualmente conhecidos são os de coeficientes logarítmicos - $\alpha^2 (m_e / m_\mu) R_n \alpha^{-1} E_F$ e $\alpha^2 (m_e / m_\mu) \ln (m_\mu / m_e) E_F$ para o muonium e $-a^2 R_n \alpha^{-1} E_F$ para o positronium.

Como em todo cálculo perturbativo precisamos que o problema não-perturbado tenha solução analítica. Neste? cálculos a parte considerada como "não-perturbada" é representada pela equação de Bethe-Salpeter com núcleo coulombiano como força ligante. Uma solução fechada de tal problema não existia e aproximações não-relativísticas eram impostas para conseguir resolver a equação inicial.

Esta situação se modificou a partir do trabalho de Barbieri-Remiddi² onde os autores conseguem uma solução exata para a EBS potencial coulombiano para o caso do positronium. Naquele trabalho é apresentada uma solução de ordem-zero sem aplicações ao cálculo em vista.

Neste trabalho extendemos o método de solução para sistemas de massas diferentes visando o muonium e o hidrogênio. Calculamos a função de onda do estado ligado fundamental, que depende da quarta-componente do momento relativo das duas partículas. Esta parte é apresentada na seção 2 onde o cálculo da E_F é mostrado explicitamente como exemplo de aplicação. A identificação dos diagramas perturbativos que contribuem para o coeficiente da ordem $a^2 (m_e / m_\mu) \ln a^{-1}$ é feita na seção 3, consi-

derando-se tão somente a troca dos fôtons coulombianos entre os dois fêrmions. É com o cálculo destes diagramas que testamos a nova solução analítica encontrada na seção 2. As nossas conclusões e perspectivas são elaboradas na seção 4.

2. SOLUÇÃO EXATA DA EQUAÇÃO DE BETHE-SALPETER PARA NUCLEO COULOMBIANO

A equação em tela é uma equação integral para a função de Green de duas partículas em interação. Vamos escrevê-la no espaço de momentos e no centro de massa dos dois fêrmions. Por simplicidade vamos omitir todos os índices espinorais. Chamando de $S(p)$ o propagador livre dos dois fêrmions:

$$S(p) = S_F^{(1)}(p) S_F^{(2)}(-p) \quad (2.1)$$

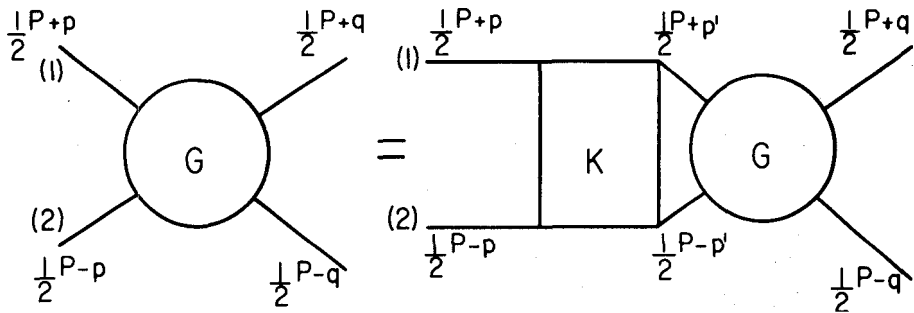
onde

$$S_F^{(i)}(p) = i(\not{p} - m_i)^{-1} \quad (2.2)$$

e com $K(P, p, p')$ a soma de todos os gráficos irreduzíveis de interação entre as partículas resulta a seguinte EBS para $G(P, p, p')$:

$$G(P, p, p') = S(p) \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} K(P, p, p') G(P, p', p) \quad (2.3)$$

que graficamente representamos como



A equação (2.3) é uma equação (não-linear) em autovalores para a energia total do sistema, P_0 que escrevemos

$$P_0 = m_1 + m_2 - |\epsilon_L| \quad (2.4)$$

onde $|\epsilon_L|$ é a energia de ligação do sistema atômico.

A interação eletromagnética, representada pelo núcleo $K(P, p, p')$ da equação (2.3) será escrita no calibre de coulomb, pois desta maneira a parte instantânea é a única componente de interação tempo-tempo (ou componente zero-zero). Esta é uma particularidade muito especial do calibre coulombiano que não acontece em outros, especialmente os covariantes. A consequência imediata é que no calibre coulombiano a parte instantânea reproduz os efeitos dominantes da ligação e não contém contribuições espúrias em ordens mais elevadas³. Portanto representando por $K_0(k)$ o núcleo de interação definido pela troca de um fóton temos:

$$K_0(k) = \gamma_\mu^{(1)} \Delta_{\mu\nu}^F(k) \gamma_\nu^{(2)} \equiv \gamma_\mu^{(1)} \Delta_{\mu\nu}^F(k) \gamma_\nu^{(2)}$$

sendo γ_μ as matrizes de Dirac e $\Delta_{\mu\nu}^F(k)$ o propagador de Feynman do fóton. Reescrevendo (2.5) em forma não-covariante vem que

$$K_0(k) = -4\pi\alpha \left\{ \frac{\beta_1 \beta_2}{|\vec{k}|^2} - \frac{\vec{\alpha}_1^T \cdot \vec{\alpha}_2^T}{k_0^2 - |\vec{k}|^2 + i\epsilon} \right\} \quad (2.6)$$

onde $\beta_i = \gamma_0^i$ e $\vec{\alpha}^T = \vec{\alpha} - \vec{\alpha} \cdot \vec{k} / |\vec{k}|$. Chamando de V_C a parte instantânea em (2.6) e V_T a parte transversa temos, graficamente

$$V_C = \text{diagram with vertical dashed line} \quad V_T = \text{diagram with vertical wavy line}$$

Nosso interesse é resolver a EBS (2.3) mantendo como núcleo o termo instantâneo (coulombiano) V_c .

A escolha do núcleo, sugerida por Barbieri e Remiddi é inspirada na possibilidade de eliminar a parte espinorial da equação integral para $G(P, pq)$ deixando uma equação escalar que pode ser resolvida analiticamente. Vejamos como: mantemos como núcleo da equação um termo coulombiano

$$K_0(P, \vec{p}\vec{q}) = i M(p, \vec{p}\vec{q}) V_c(\vec{p}-\vec{q}) \quad (2.7)$$

e propomos a seguinte solução para a equação (2.3):

$$G(P, pq) = S(p) M(P, \vec{p}\vec{q}) S(q) H(P, \vec{p}\vec{q}) \quad (2.8)$$

sendo $H(P, \vec{p}\vec{q})$ uma função escalar (sem índices espinoriais). Levando (2.7) e (2.8) em (2.3) obtemos:

$$S(p) \left\{ M(P, \vec{p}\vec{q}) H(P, \vec{p}\vec{q}) - i \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} V_c(\vec{p}-\vec{p}') H(P, \vec{p}'\vec{q}) \right. \\ \left. \left[M(P, \vec{p}\vec{p}') S(p') M(P, \vec{p}'\vec{q}) \right] \right\} S(q) = 0 \quad (2.9)$$

Se $M(P, pq)$ definida em (2.7) for tal que

$$M(P, \vec{p}\vec{p}') S(p') M(P, \vec{p}'\vec{q}) = M(P, \vec{p}\vec{q}) f(p') \quad (2.10)$$

então a equação integral (quadridimensional) para $G(P, pq)$ - equação (2.9) - se reduz a uma equação integral, a três dimensões, para a função escalar $H(P, \vec{p}\vec{q})$:

$$H(P, \vec{p}\vec{q}) = \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \left[\int \frac{dp'_0}{2\pi} i f(p') \right] V_c(\vec{p}-\vec{p}') H(P, \vec{p}'\vec{q}) \quad (2.11)$$

Portanto resolver a equação integral para $H(P, \vec{p}\vec{q})$ e encontrar uma matriz $M(P, pq)$ que cumpra a condição (2.10) é equivalente a resolver a EBS para a função de Green - $G(P, pq)$.

A matriz abaixo satisfaz esta condição:

$$M(P, \vec{p}\vec{q}) = R(P, \vec{p})R(P, \vec{q}) \lambda(\vec{p}\vec{q}) \quad (2.12)$$

sendo $R(P, \vec{p})$ uma função livre que servirá para ajustar a equação integral (2.11) para a mesma forma que a equação de Schrödinger-coulomb. A matriz $\lambda(\vec{p}\vec{q})$ é

$$\lambda(\vec{p}\vec{q}) = 4 \sqrt{\frac{E_1^{\mathcal{P}} E_1^{\mathcal{Q}} E_2^{\mathcal{P}} E_2^{\mathcal{Q}}}{(E_1^{\mathcal{P}}+m_1)(E_1^{\mathcal{Q}}+m_1)(E_2^{\mathcal{P}}+m_2)(E_2^{\mathcal{Q}}+m_2)}} \cdot \beta_1 \beta_2 \left[\Lambda_+^1(\vec{p}) \frac{1+\beta_1}{2} \Lambda_+^1(\vec{q}) \right] \left[\Lambda_+^2(-\vec{p}) \frac{1+\beta_2}{2} \Lambda_+^2(-\vec{q}) \right] \quad (2.13)$$

onde

$$E_i^{\mathcal{P}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$$

$$\Lambda_+^i(\vec{p}) = \frac{E + H(\vec{p})}{2E}$$

$$H(\vec{p}) = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m$$

usando que $\Lambda_{\pm}^i(\vec{p}) \Lambda_{\pm}^i(\vec{p}) = \Lambda_{\pm}^i(\vec{p})$

$$\Lambda_{\pm}^i(\vec{p}) \Lambda_{\pm}^i(\vec{p}) = 0 \quad (2.14)$$

$$\frac{1+\beta}{2} \Lambda_{\pm}^i(\vec{p}) \frac{1+\beta}{2} = \frac{E^{\mathcal{P}} \pm m}{2E^{\mathcal{P}}} \frac{1+\beta}{2}$$

é fácil vermos que

$$\lambda(\vec{p}\vec{p}') \lambda(\vec{p}'\vec{q}) = \lambda(\vec{p}\vec{q}) \quad (2.15)$$

Com a definição (2.13) e as propriedades (2.14), substituindo em (2.10) temos que

$$f(p') = R^2(P, \vec{p}') \left(\frac{1}{2} P_0 + p_0' - E_1^{\mathcal{P}'} + i\varepsilon \right)^{-1} \left(\frac{1}{2} P_0 - p_0' - E_2^{\mathcal{P}'} + i\varepsilon \right)^{-1} \quad (2.16)$$

Desta forma a EBS-escala (2.11) fica

$$H(P, \vec{p}\vec{q}) = \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} V_C(\vec{p}-\vec{p}') \frac{R^2(P, \vec{p}')}{E_1^{\vec{p}'} + E_2^{\vec{p}'} - P_0} H(P, \vec{p}'\vec{q}) \quad (2.17)$$

A equação (2.17) tem a forma semelhante à equação integral de Schrödinger com potencial coulombiano para a função de Green:

$$g(\omega, \vec{p}\vec{q}) = g_0(\omega, \vec{p}) \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} V_C(\vec{p}-\vec{p}') g(\omega, \vec{p}'\vec{q}) \quad (2.18)$$

sendo

$$g(\omega, \vec{p}\vec{q}) = \langle \vec{p} | g(\omega) | \vec{q} \rangle$$

$$g_0(\omega, \vec{p}) = \langle \vec{p} | g_0(\omega) | \vec{p} \rangle$$

$$g(\omega) = (H_0 + V - \omega)^{-1}, \quad g_0(\omega) = (H_0 - \omega)^{-1}; \quad H_0 = p^2/2m_R$$

Fazendo as transformações

$$g(\omega, \vec{p}\vec{q}) = g_0(\omega, \vec{p}) g_0(\omega, \vec{q}) h(\omega, \vec{p}\vec{q}) \quad (2.19)$$

obtemos para $h(\omega, \vec{p}\vec{q})$

$$h(\omega, \vec{p}\vec{q}) = \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} V_C(\vec{p}-\vec{p}') \frac{2m_R}{\vec{p}'^2 - 2m_R\omega} h(\omega, \vec{p}'\vec{q}) \quad (2.20)$$

A equação (2.20) é uma equação de auto-valores para $h(\omega, \vec{p}\vec{q})$; para o estado fundamental $\omega = -\gamma^2/2m_R$ sendo $\gamma = m_R a$. Para podermos comparar (2.17) e (2.20) fazemos

$$R(P, \vec{p}) = \sqrt{\frac{2m_R}{\vec{p}^2 + \gamma^2} (E_1^{\vec{p}} + E_2^{\vec{p}} - P_0)} \quad (2.21)$$

Daí vem que

$$H(P, \vec{p}\vec{q}) = h(\omega, \vec{p}\vec{q}) = g_0^{-1}(\omega, \vec{p}) g(\omega, \vec{p}\vec{q}) g_0^{-1}(\omega, \vec{q}) \quad (2.22)$$

onde a segunda igualdade se obtém invertendo (2.19).

De (2.8) e (2.22) obtemos uma expressão para a função de Green do problema relativístico de duas partículas em interação em termos da função de Green do correspondente problema não-relativístico:

$$G(P, pq) = S(p)g_0^{-1}(\omega, \vec{p})M(P, \vec{pq})g_0^{-1}(\omega, \vec{q})S(q)g(\omega, \vec{pq}) \quad (2.23)$$

A função de Green $g(\omega, \vec{pq})$ tem polos nos valores de energia correspondentes aos estados ligados

$$g(\omega, \vec{pq}) = \sum \frac{\phi_n(\vec{p}) \phi_n^+(\vec{q})}{\omega - \omega_n + i\epsilon} \quad (2.24)$$

$$\text{com } \omega_n = -1/n^2 \frac{\gamma^2}{2m_R}$$

Da mesma forma podemos escrever a função de Green de Bethe-Salpeter como

$$G(P, pq) = \sum_n \frac{\psi_n(p) \bar{\psi}_n(q)}{P_0 - E_n + i\epsilon} \quad (2.25)$$

A cada polo em $g(\omega, \vec{pq})$ corresponde um polo em $G(P, pq)$. De (2.25), (2.24) e (2.23) obtemos a função de onda para o problema relativístico $\psi(p)$ em termos da função de onda de Schrödinger, $\phi(\vec{p})$ assim como sua conjugada. Especificamente para estado fundamental encontramos:

$$\psi(p) = \frac{\sqrt{4 E_1^p E_2^p}}{(E_1 + m_1)(E_2 + m_2)} R(P, \vec{p}) \left(\frac{1}{2} P_0 + p_0 - E_1^p + i\epsilon\right)^{-1} \left(\frac{1}{2} P_0 - p_0 - E_2^p + i\epsilon\right)^{-1} \\ \frac{p^2 + \gamma^2}{2m_R} \phi(\vec{p}) \left[\Lambda_+^1(\vec{p}) \frac{1 + \beta_1}{2} \right] \left[\Lambda_+^2(-\vec{p}) \frac{1 + \beta_2}{2} \right] \quad (2.26)$$

sendo $\phi(p)$ a função de onda do átomo de hidrogênio no estado fundamental

$$\phi(\vec{p}) = \frac{8\sqrt{\pi} \gamma^{5/2}}{(p^2 + \gamma^2)} \quad (2.27)$$

De posse desta solução analítica passamos a apresentar o esquema perturbativo que permitirá calcular $\Delta v(\text{EHF})$ na ordem desejada.

O núcleo K_0 introduzido em (2.7) produz a solução (2.23) e

(2.26) de ordem-zero (não-perturbada). Podemos tratar $K = K - K_0$ que é uma soma infinita de diagramas irreduzíveis como uma perturbação. O deslocamento da posição da energia de ligação devido a ΔK é dado (até 2ª ordem) por:

$$E = E_0 + \langle \psi | \Delta K | \psi \rangle |_{P_0} = E_0 + \langle \psi | \Delta K \bar{G}_0 \Delta K | \psi \rangle |_{P_0} = E_0 +$$

$$+ [\langle \psi | \Delta K | \psi \rangle \cdot \frac{\partial}{\partial P_0} \langle \psi | \Delta K | \psi \rangle] |_{P_0} = E_0 \quad (2.28)$$

onde \bar{G}_0 é a parte regular da função de Green com respeito ao polo em P_0 .

Apenas como ilustração da técnica perturbativa e da solução exata acima desenvolvida, vamos calcular a ordem principal da estrutura hiperfina - E_{F^*} . Como é sabido o termo principal é obtido da troca de um fóton transverso. Logo

$$\Delta K_T = - 4\pi \alpha \frac{\vec{\gamma}_1 \cdot \vec{\gamma}_2}{k^2 + i\epsilon} \quad (2.29)$$

A diferença do valor esperado deste operador entre os estados triplete e singleto nos dá o termo procurado:

$$\Delta E = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^4} \frac{d^3 q}{(2\pi)^4} \bar{\Psi}(p) \Delta K_T \Psi(q) \quad (2.30)$$

Utilizando a função de onda (2.26) temos

$$\Delta E = - \left(\frac{1}{2\pi}\right)^8 (64\pi\gamma^5) \left(\frac{\pi\alpha}{m_R^2}\right) \int d^3 p d^3 q \frac{R(P, \vec{p})}{(\vec{p}^2 + \gamma^2)} \frac{R(P, \vec{q})}{(\vec{q}^2 + \gamma^2)} I_0 \cdot$$

$$\langle \chi | \frac{1+\beta_1}{2} \frac{1+\beta_2}{2} \Lambda_+^1(\vec{p}) \Lambda_+^1(-\vec{p}) \vec{\alpha}_1 \cdot \vec{\alpha}_2 \Lambda_+^1(\vec{q}) \Lambda_+^2(-\vec{q}) \frac{1+\beta_1}{2} \frac{1+\beta_2}{2} | \chi \rangle \quad (2.31)$$

sendo

$$\begin{aligned}
I_0 &= \int d\vec{p}_0 dq_0 \frac{1}{(p-q)^2 + i\epsilon} \left(\frac{1}{2} P_0 + p_0 - E_1^P + i\epsilon\right)^{-1} \left(\frac{1}{2} P_0 - p_0 - E_2^P + i\epsilon\right)^{-1} \\
&\quad \left(\frac{1}{2} P_0 + q_0 - E_1^Q + i\epsilon\right)^{-1} \left(\frac{1}{2} P_0 - q_0 - E_2^Q + i\epsilon\right)^{-1} = \\
&= \frac{2\pi^2}{|\vec{k}|^2} (P_0 - E_1^P - E_2^P)^{-1} (P_0 - E_1^Q - E_2^Q)^{-1} \\
&\quad \frac{(P_0 - E_1^P - E_2^P - 2|\vec{k}|)(P_0 - E_1^Q - E_2^Q - |\vec{k}|) - (P_0 - E_1^Q - E_2^Q)(P_0 - E_1^P - E_2^P - |\vec{k}|)}{(E_2^P - E_2^Q - |\vec{k}|)(P_0 - E_1^P - E_2^P - |\vec{k}|)(P_0 - E_1^Q - E_2^Q - |\vec{k}|)} \quad (2.32)
\end{aligned}$$

e

$$|\vec{k}| = |\vec{p} - \vec{q}| \quad \text{e} \quad (P_0 - E_1^P - E_2^P) \approx \frac{p^2 + \gamma^2}{2m_R}$$

Fazendo uma análise do integrando em (2.31) vemos que a região de maior contribuição é a de momentos não-relativísticos, isto é, $\gamma < p < m_R$. Para calcularmos a media sobre os spins temos que observar que, como estamos interessados somente na diferença hiperfina, sô os termos que contêm um par $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2$ contribuem. Além disso devido à presença dos projetores $(1+\beta)/2$ sô os termos com um número para de \vec{a} 's contribuem. Das observações acima encontramos que

$$\langle \chi | \dots | \chi \rangle \stackrel{\text{EHF}}{=} \frac{-1}{4m_1 m_2} \langle \chi | \vec{\sigma}_1 \cdot (\vec{p} - \vec{q}) \vec{\sigma}_2 \cdot (\vec{p} - \vec{q}) - \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 (\vec{p} - \vec{q}) | \chi \rangle$$

Como o estado fundamental é esfericamente simétrico vem que

$$\langle \chi | \dots | \chi \rangle \stackrel{\text{EHF}}{=} \frac{|\vec{p} - \vec{q}|}{4m_1 m_2} \frac{2}{3} \langle \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \rangle \quad (2.33)$$

A expressão (2.32) (integral das quartas-componentes) na região não-relativística tem o seguinte limite:

$$- \frac{4\pi^2}{|\vec{p} - \vec{q}|^2} \frac{2m_R}{(p^2 + \gamma^2)} \frac{2m_R}{(p^2 + \gamma^2)} \quad (2.34)$$

Levando estes resultados em (2.31) podemos, facilmente, calcular as integrais nos tri-momentos \vec{p} e \vec{q} :

$$\Delta E = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^8 64\pi^2 \frac{\gamma^5 \alpha}{m_R^2} 4\pi^2 \frac{m_R^2}{m_1 m_2} \frac{2}{3} \langle \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \rangle \int d^3 p d^3 q \frac{1}{(p^2 + \gamma^2)} \frac{1}{(q^2 + \gamma^2)^2} \quad (2.35)$$

As integrais em (2.35) podem ser feitas analiticamente (seu valor é π^4/γ^2) o que nos dá

$$E = \frac{2}{3} \langle \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \rangle \frac{m_R^3}{m_1 m_2} \alpha^4$$

Tomando os valores entre os estados singleto e tripleto

$$\begin{aligned} \langle \sigma_1 \cdot \sigma_2 \rangle \Big|_S^T &= 4 \\ \Delta E \Big|_S^T &= \frac{8}{3} \frac{m_R^3}{m_1 m_2} \alpha^4 \equiv E_F \end{aligned} \quad (2.37)$$

que é a conhecida energia de Fermi que corresponde à ordem dominante da separação hiperfina.

3. CALCULO PERTURBATIVO DAS CONTRIBUIÇÕES COULOMBIANAS PARA ORDEM

$$\left(a^2 \frac{m_1}{m_2} \ln a^{-1}\right) E_F.$$

A primeira contribuição coulombiana (isto é, resultante da troca de fótons instantâneos) a considerar está contida na própria aproximação escada que deu origem à função de onda de ordem-zero. O núcleo escolhido em (2.7) não contém toda a interação instantânea da aproximação escada. Portanto, a diferença será a perturbação que deteta a correção devido à troca de um fóton.

$$\Delta K = [\bar{\beta}_1 \beta_2 - M(p, \vec{p}\vec{q})] V_e(\vec{p}-\vec{q}) \quad (3.1)$$

O valor esperado desta expressão é a primeira correção para a energia do estado ligado

$$\Delta E = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \bar{\psi}(p) \Delta K_c \psi(q) \quad (3.2)$$

Vejamos inicialmente a contribuição do 2º termo de (3.1) - $\bar{\psi}(p) M(p, pq) \psi(q)$ - cuja parte matricial é

$$\frac{1+\beta_1}{2} \Lambda_+^1(\vec{p}) \frac{1+\beta_2}{2} \Lambda_+^2(-\vec{p}) \beta_1 \beta_2 \lambda(\vec{p}\vec{q}) \Lambda_+^1(\vec{q}) \frac{1+\beta_1}{2} \Lambda_+^2(-\vec{q}) \frac{1+\beta_2}{2}$$

Usando (2.13) e (2.14) encontramos

$$\frac{(E_1^p+m_1)(E_2^q+m_2)(E_1^q+m_1)(E_2^q+m_2)}{E_1^p E_2^p E_1^q E_2^q} \frac{1+\beta_1}{2} \frac{1+\beta_2}{2}$$

Concluimos que este termo não ajuda a levantar a degeneração entre os estados tripleto e singleto pois não possui o operador responsável pela separação hiperfina.

A contribuição do primeiro é dado pela integral de

$$\psi^\dagger(p) V_c(\vec{p}-\vec{q}) \psi(q) .$$

A parte matricial desta expressão é:

$$\frac{1+\beta_1}{2} \frac{1+\beta_2}{2} \left[\Lambda_+^2(\vec{p}) \Lambda_+^2(-\vec{p}) \Lambda_+^1(\vec{q}) \Lambda_+^2(-\vec{q}) \right] \frac{1+\beta_1}{2} \frac{1+\beta_2}{2}$$

Devido aos projetores $1+\beta/2$ de ambos os lados esta expressão se reduz a:

$$\frac{(E_1^p+m_1)(E_1^q+m_1)+i \vec{\sigma}_1 \cdot (\vec{p}-\vec{q})}{4E_1^p E_1^q} \cdot \frac{(E_2^p+m_2)(E_2^q+m_2)+i \vec{\sigma}_2 \cdot (\vec{p}-\vec{q})}{4E_2^p E_2^q}$$

O conteúdo hiperfino deste termo é obtido quando temos o par $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$, isto é:

$$- \frac{1}{16} \frac{\vec{\sigma}_1 \cdot (\vec{p}\Lambda\vec{q}) \vec{\sigma}_2 \cdot (\vec{p}\Lambda\vec{q})}{E_1^p E_1^q E_2^p E_2^q}$$

Fazendo a média angular temos

$$- \frac{\langle \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \rangle}{3} \frac{|\vec{p}\Lambda\vec{q}|^2}{16 E_1^p E_2^p E_1^q E_2^q} \quad (3.3)$$

Levando o resultado acima para a expressão (3.2) e efetuando as integrais nas quartas-componentes encontramos

$$\Delta E = (64 \pi \gamma^5) (4 \pi \alpha) \frac{\langle \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \rangle}{3} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{(p^2 + \gamma^2)^2} \frac{|\vec{p} \Lambda \vec{q}|^2}{|\vec{p} - \vec{q}|^2} \frac{1}{(q^2 + \gamma^2)^2} \times$$

$$\times \frac{1}{16 m_1^2 m_2^2} \cdot \frac{F_1(\vec{p}q, m_1 m_2 \gamma)}{F_2(\vec{p}q, m_1 m_2 \gamma)} \quad (3.4)$$

sendo

$$F_1 = \left[\frac{16 E_1^P E_2^P E_1^P E_2^P}{(E_1^P + m_1)(E_2^P + m_2)(E_1^Q + m_1)(E_2^Q + m_2)} \cdot \frac{(p^2 + \gamma^2)/2m_R}{E_1^P + E_2^P - P_0} \cdot \frac{(q^2 + \gamma^2)/2m_R}{E_1^Q + E_2^Q - P_0} \right]^{1/2}$$

$$F_2(\vec{p}q, m_1 m_2 \gamma) = \left[\left(1 + \frac{p^2}{m_1^2}\right) \left(1 + \frac{p^2}{m_2^2}\right) \left(1 + \frac{q^2}{m_1^2}\right) \left(1 + \frac{q^2}{m_2^2}\right) \right]^{1/2}$$

Observe que as funções F_1 e F_2 são adimensionais e tem como limite na região não-relativística o valor um. Vemos que o fator global que multiplica as integrais é

$$\frac{m_R^5}{m_1^2 m_2^2} \alpha^6$$

que tem dimensão de energia. Portanto podemos esperar um termo logarítmico vindo das integrais. Para calcularmos o coeficiente do termo α^6 teríamos que calcular as integrais em (3.4) sem aproximar o integrando. Como o nosso interesse está no termo logaritmo podemos aproximar o integrando na região de momentos não-relativísticos, $|\vec{p}|$ e $|\vec{q}| \ll$ menor (m_1, m_2) . Assim (3.4) fica

$$\Delta E = E_F \frac{m_R^2 \alpha^2}{8 m_1 m_2} \frac{1}{\pi^4} \int d^3 p d^3 q \frac{1}{(p^2 + \gamma^2)^2} \frac{|\vec{p} \Lambda \vec{q}|^2}{|\vec{p} - \vec{q}|^2} \frac{1}{(q^2 + \gamma^2)^2}$$

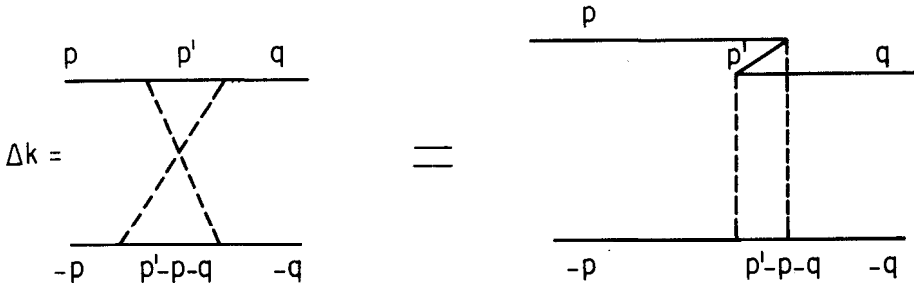
Esta integral é uma combinação daquelas mostradas na tabela e seu valor é $(2\pi^4) \ln \alpha^{-1}$.

Dai vem que

$$\Delta E = \frac{1}{4} \alpha^2 \frac{m_R^2}{m_1 m_2} \ln \alpha^{-1} E_F \quad (3.5)$$

Esta é a contribuição ã EHF do átomo formado por dois leptons de massas m_1 e m_2 no estado fundamental pela troca de fótons coulombianos.

A segunda contribuição coulombiana para a ordem estabelecida é o diagrama Z , ou diagrama de dois fótons cruzados:



Evidentemente este diagrama não pode ser gerado por simples interação dos termos da aproximação escada.

Este núcleo perturbativo é dado explicitamente por

$$\Delta K_Z = \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} V_e(\vec{p} - \vec{p}') V_e(\vec{q} - \vec{p}') \beta_1 \beta_2 S_F^1(p') S_F^2(+p' - p - q) \beta_1 \beta_2 \quad (3.6)$$

Daí vemos que a ordem original para o valor esperado é $(\alpha^2 \gamma^5)$, portanto uma potência inversa de γ será necessária da integral de momentos para atingir a ordem α^6 pretendida.

Analisando a integração em momentos obtemos os seguintes resultados:

$$\Delta E_Z = (64\pi\gamma^5) (4\pi\alpha)^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{(p^2 + \gamma^2)^2} \frac{F(m_1 m_2 \gamma_1 \vec{p} \vec{q} \vec{p}')}{|\vec{p} - \vec{p}'|^2 |\vec{q} - \vec{p}'|^2} \frac{1}{(q^2 + \gamma^2)^2} \quad (3.7)$$

usando a equação de Schrödinger-coulomb para o estado fundamental podemos efetuar uma das integrais de momento em (3.7) :

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(p^2+\gamma^2)^2} \frac{1}{|\vec{p}-\vec{p}'|^2} = \frac{1}{2m_R} \frac{1}{4\pi\alpha} \frac{1}{(\vec{p}'^2+\gamma^2)} \quad (3.8)$$

Para usarmos este resultado temos que eliminar a dependência em \vec{p} na função $F(m_1 m_2 \gamma; \vec{p}, \vec{p}', \vec{q})$.

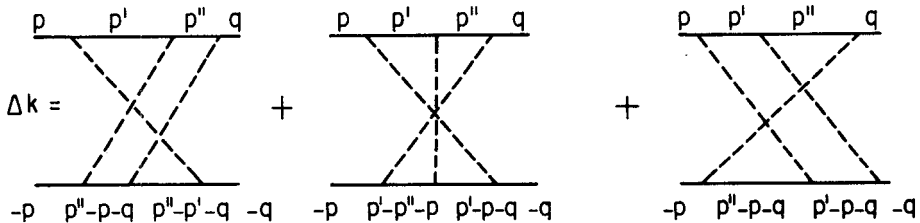
Neste caso

$$F(m_1 m_2 \gamma; \vec{p}, \vec{p}', \vec{q} = 0) = \frac{\langle \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \rangle}{3} \frac{|\vec{p} \Lambda \vec{q}|^2}{16m_1^2 m_2^2} f(\vec{p} \vec{p}', m_1 m_2 \gamma) \quad (3.9)$$

$$f(\vec{p} \vec{p}', m_1 m_2) = \frac{(m_1 - m_2) + (E_2^{\vec{p}} - E_1^{\vec{p}'})}{[\underline{P}_0 - E_2(\vec{p} - \vec{p}') - m_2 - E_2(\vec{p}) - E_1(\vec{p}')] [\underline{P}_0 - E_1(\vec{p}') - E_2(\vec{p}' - \vec{p}) - m_1 - E_1(\vec{p})]} \quad (3.10)$$

Como estamos interessados no termo logaritmo podemos fazer uma aproximação não-relativística no integrando de (3.7) (e usando (3.8), (3.9) e (3.10)). Neste limite $f(\vec{p} \vec{p}', m_1 m_2) \xrightarrow{\text{N.R.}} \frac{1}{2} (m_1 - m_2) / m_1 m_2$. É fácil verificarmos que a integral que resulta não contribui para o coeficiente da ordem α^2 Rri a $\frac{1}{E_F}$.

A contribuição devido à troca de 3 fôtons instantâneos, não incluídos no núcleo escada, é dada pelos seguintes gráficos irreduzíveis:



O primeiro destes gráficos é dado formalmente por

$$\Delta K_1 = \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p''}{(2\pi)^4} V_c(\vec{p}-\vec{p}') V_c(\vec{p}'-\vec{p}'') V_c(\vec{p}''-\vec{q}) \cdot \{ \beta_1 \beta_2 S_F^1(p') S_F^2(p''-p-q) \beta_1 \beta_2 S_F^1(p'') S_F^2(p''-p'-q) \beta_1 \beta_2 \} \quad (3.11)$$

A contribuição destes processos para o valor esperado da energia é

$$\Delta E = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \bar{\psi}(p) (\Delta K_1 + \Delta K_2 + \Delta K_3) \psi(q) \quad (3.12)$$

Como podemos observar cada termo perturbativo acima possui quatro propagadores fermiônicos. Cada propagador possui dois termos. Portanto na integral acima temos a soma de quarenta e oito termos.

Usando (2.26) encontramos

$$\Delta E = (64\pi\gamma^5) (4\pi\alpha)^3 \int \frac{d^3 p' d^3 p''}{(2\pi)^6} \frac{1}{|\vec{p}' - \vec{p}''|^2} \int \frac{d^3 p d^3 q}{(2\pi)^6} \frac{I_i M_i}{(p^2 + \gamma^2)^2 |\vec{p} - \vec{p}'|^2 |\vec{q} - \vec{p}''|^2} \frac{1}{(q^2 + \gamma^2)^2}$$

onde I_i e M_i são dados no apêndice.

A contagem de potências de a em (3.13) nos dá a^8 . Podemos, no entanto, usar a equação de Schrödinger duas vezes para retornar à ordem desejada. Para fazer isto devemos levar os momentos externos \vec{p} e \vec{q} a zero em M_i e I_i . Fazendo isto temos

$$\begin{aligned} \langle M_i \rangle &= \frac{1+\beta_1}{2} \frac{1+\beta_2}{2} \left[\Lambda_{\epsilon_1}^1(\vec{p}') \Lambda_{\epsilon_2}^1(\vec{p}'') \Lambda_{\epsilon_3}^2(\vec{k}) \Lambda_{\epsilon_4}^2(\vec{k}') \right] \frac{1+\beta_1}{2} \frac{1+\beta_2}{2} \\ &= \frac{\text{EHF}}{3} \frac{1}{\langle \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \rangle} \frac{|\vec{p}' \Lambda \vec{p}''|^2}{16 E_1(p') E_2(k) E_1(p'') E_2(k')} \\ &= -\frac{1}{3} \langle \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \rangle \frac{|\vec{p}' \Lambda \vec{p}''|^2}{16 m_1^2 m_2^2} f_i(\vec{p}' \vec{p}'') \end{aligned}$$

Levando este resultado em (3.13) encontramos

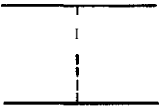
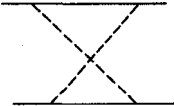
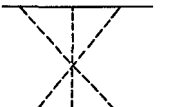
$$\Delta E = \frac{4\pi^2}{3} \langle \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \rangle \frac{m_R^3}{m_1^2 m_2^2} \alpha^6 \cdot I$$

sendo

$$I = \int \frac{d^3 p' d^3 p''}{(2\pi)^6} \frac{1}{(p'^2 + \gamma^2)} \frac{|\vec{p}' \Lambda \vec{p}''|^2}{|\vec{p}' - \vec{p}''|^2} \frac{1}{(p''^2 + \gamma^2)} \sum_i I_i f_i$$

Portanto, a integral I acima deve ser capaz de gerar Rna para que este conjunto de gráficos nos dê a ordem desejada. Entretanto, contando as potenciais de momento no integrando vemos que $I_i f_i$ devem ser proporcionais a $(p' p'')^{-2}$. No entanto esta contagem de potências não pode ser encontrada na região não-relativística que é a geradora de $\ln a$ e sim na região intermediária. Mas esta região nos dá $\ln(m_2/m_1)$ que não nos interessa. Para completar devemos observar que a troca de uma quantidade maior de fótons nos afasta da ordem principal α^6 . Nosso resultado final vai expressado na tabela abaixo onde vemos a contribuição de cada conjunto de gráficos.

Contribuições coulombianas $\tilde{\alpha} \propto \alpha^2 \frac{m_R^2}{m_1 m_2} \ln \alpha^{-1}$

NÚCLEO	PERTUBATIVO	COEFICIENTE
		1/4
		0
	 PERMUTAÇÕES	0

4. CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Os cálculos perturbativos apresentados na seção 3, utilizam a função de onda "exata" obtida na seção 2. Estes cálculos funcionam como teste ou laboratório teórico das qualidades e, ou, defeitos daquela função de onda, obtida analiticamente mediante uma reformulação do núcleo e simultaneamente do propagador da EBS com núcleo coulombiano. O cálculo foi explicitamente auto-limitado às contribuições hiperfinas puramente coulombianas, e estas foram esgotadas nos diagramas considerados. Nos loops dos diagramas das contribuições de troca de fótons instantâneos não aparecem outros polos que os dos propagadores fermiônicos e, a novidade, os da função de onda que aqui depende da quarta-componente do momento relativo do par ligado

Desta forma podemos colocar em destaque o fato de utilizarmos uma função de onda onde as partículas são descritas com o tempo relativo diferente de zero.

Quando as integrais, resultantes dos elementos de matriz da perturbação, são analisadas no espaço de momentos observamos que resulta simples e direto obter a contribuição logarítmica que é sempre gerada na região não-relativística, onde o momento pode ser parcialmente desprezado em confronto com as massas do sistema. Não resultou, porém, simples analisar qualquer outra região de momentos. Por exemplo, a região intermediária que é relativística para o elétron mas é não-relativística para o muon. Nesta última região os fatores associados com a função de onda produzem um integrando não-analítico difícil de se tratar e obter a contribuição dominante (aqui contribuição dominante significa $a^2 m_e/m_\mu$ ou $a^2 m_e/m_\mu \ln(m_\mu/m_e)$). Sabemos que isto não representa uma dificuldade essencial, pois uma criteriosa combinação de diferentes diagramas perturbativos que contribuem na mesma ordem poderá eventualmente simplificar os integrandos e reduzir o grau de dificuldade no cálculo em discussão. Entretanto esta manipulação dos núcleos perturbativos terá que ser feita explicitamente pois neste caso não existem regras fixas para tal tarefa. Devemos lembrar que quando calculamos utilizando a função de onda de Schrödinger, por exemplo, a partir da Equ-

ção de Salpeter ou Gross, este re-ordenamento dos diagramas perturbati-
vos é também colocado em ação. As desvantagens do presente tratamento a
respeito do ordenamento temporal aparecerão quando fótons não- instan-
tâneos forem considerados no mesmo gráfico que os coulombianos. Como
a função de onda não impõe restrições ao ordenamento temporal nos pon-
tos de inserção dos fótons, resultará que as simplificações obtidas fa-
zendo um ordenamento temporal não estão garantidas com a nova função de
onda; pelo menos para os diagramas de um fóton transversal atravessados
por um número infinito de fótons coulombianos. Nós estamos atualmente
realizando os cálculos incluindo a parte transversal do fóton e os re-
sultados serão apresentados em breve.

A função de onda obtida é completamente simétrica nas massas
 m_1 e m_2 e o método de resolução não se vale de nenhuma expansão no pa-
râmetro (m_1/m_2). Isto significa que as correções de recuo em todas as
ordens estão incluídas exatamente na função de onda. Daí que o sistema
positronium, de massas iguais, parece ser o candidato mais indicado pa-
ra utilizar a função de onda obtida.

Para concluir podemos dizer que os cálculos perturbativos em
ordens mais elevadas parecem ser muito mais simples quando realizados
com a função de onda de Schrödinger e com as correções a esta aproxima-
ção. Entretanto a simetria das massas e o correto comportamento ultra-
violeta da função de onda indica a sua utilidade para o positronium,
nas correções de vértices na polarização do vácuo e auto-energias.

A função de onda calculou-se exatamente mas a partir de um ha-
miltoniano "aproximado", e portanto não aparece como a solução final do
problema de cálculos perturbativos do espectro de energia dos sistemas
ligados pela interação eletromagnética.

Tabela de Integrais

Contribuições de integrais do tipo

$$\int d^3p d^3q \frac{1}{(p^2 + \gamma^2)^2} \frac{f(\vec{p}, \vec{q})}{|\vec{p} - \vec{q}|^2} \frac{1}{(q^2 + \gamma^2)^2}$$

$f(\vec{p}\vec{q})$	contribuição principal	coeficiente do $\ln \alpha^{-1}$
$p^2 q^2$	$4\pi^4 \ln \alpha^{-1}$	$4\pi^4$
p^4	$\sim \alpha^{-1}$	0
$p^2 (\vec{p}-\vec{q})^2$	$\sim \alpha^{-1}$	0
$(\vec{p}-\vec{q})^4$	$\sim \alpha^{-1}$	0

Função F em (3.7)

$$\langle \chi \left| \frac{1+\beta}{2} \Lambda_+^1(\vec{p}) \Lambda_+^2(-\vec{p}) \left[I_{+-} \Lambda_+^1(\vec{p}') \Lambda_-^2(\vec{p}'-\vec{p}-\vec{q}) - I_{-+} \Lambda_-^1(\vec{p}') \Lambda_+^2(\vec{p}'-\vec{p}-\vec{q}) \right] \right. \\ \left. \cdot \Lambda_+^1(\vec{q}) \Lambda_+^2(-\vec{q}) \frac{1+\beta}{2} \right| \chi \rangle$$

sendo: $\frac{1+\beta}{2} \frac{1+\beta_1}{2} \cdot \frac{1+\beta_2}{2}$

$$I_{+-} = i \left[P_0 - E_1(\vec{p}') - E_2(\vec{p}) - E_2(\vec{q}) - E_2(\vec{p}'-\vec{p}-\vec{q}) \right]^{-1}$$

$$I_{-+} = i \left[P_0 - E_1(\vec{p}') - E_1(\vec{p}) - E_1(\vec{q}) - E_2(\vec{p}'-\vec{p}-\vec{q}) \right]^{-1}$$

I_i e M_i em (3.13)

$$I_i = \frac{(p^2 + \gamma^2)(q^2 + \gamma^2)}{(2m_R)^2} \int \frac{dp_0 dp_0' dp_0'' dq_0}{(2\pi)^4} D(p_0) D_{\epsilon_1}^1(p') D_{\epsilon_2}^1(p'') D_{\epsilon_3}^2(k) D_{\epsilon_4}^2(k')$$

$$M_i = \frac{1+\beta}{2} \left[\Lambda_+^1(\vec{p}) \Lambda_+^2(-\vec{p}) \Lambda_{\epsilon_1}^1(\vec{p}') \Lambda_{\epsilon_2}^1(\vec{p}'') \Lambda_{\epsilon_3}^2(\vec{k}) \Lambda_{\epsilon_4}^2(\vec{k}') \Lambda_+^1(\vec{q}) \Lambda_+^2(-\vec{q}) \right] \frac{1+\beta}{2}$$

sendo:

$$\frac{1+\beta}{2} = \frac{1+\beta_1}{2} \frac{1+\beta_2}{2}$$

O índice (i) e os momentos k e k' são dados por:

i	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3	ϵ_4	k	k'
1	+	+	+	-	$p'-p''-p$	$p'-p-q$
2	+	-	-	+	$p'-p''-p$	$p'-p-q$
3	+	-	-	-	$p'-p''-p$	$p'-p-q$
4	-	+	+	+	$p'-p''-p$	$p'-p-q$
5	-	+	+	-	$p'-p''-p$	$p'-p-q$
6	-	-	-	+	$p'-p''-p$	$p'-p-q$
7	+	+	-	-	$p''-p -q$	$p'-p-q$
8	+	-	+	-	$p''-p -q$	$p'-p-q$
9	-	+	-	+	$p''-p -q$	$p'-p-q$
10	-	-	+	+	$p''-p -q$	$p'-p-q$
11	+	+	-	+	$p''-p -q$	$p''-p'-q$
12	+	-	+	+	$p''-p -q$	$p''-p'-q$
13	+	-	-	+	$p''-p -q$	$p''-p'-q$
14	-	+	+	-	$p''-p -q$	$p''-p'-q$
15	-	+	-	-	$p''-p -q$	$p''-p'-q$
16	-	-	+	-	$p''-p -q$	$p''-p'-q$

Os valores de I_i são mostrados na tabela a seguir:

i		I_i
1	-	$\left[P_0 - 2m_1 - E_1(\vec{p}') - E_2(\vec{p}') \right]^{-1} \left[\frac{1}{2} P_0 - m_2 - E_1(\vec{p}') - E_2(\vec{p}') - E_2(\vec{p}' - \vec{p}'') \right]^{-1}$
2	-	$\left[\frac{1}{2} P_0 - m_2 - E_1(\vec{p}'') - E_2(\vec{p}' - \vec{p}'') - E_1(\vec{p}') \right]^{-1} \left[\frac{1}{2} P_0 - m_1 - E_1(\vec{p}'') - E_2(\vec{p}' - \vec{p}'') - E_2(\vec{p}') \right]^{-1}$
3	+	$\left[P_0 - 2m_2 - E_1(\vec{p}') - E_2(\vec{p}') \right]^{-1} \left[\frac{1}{2} P_0 - m_2 - E_1(\vec{p}') - E_1(\vec{p}'') - E_2(\vec{p}' - \vec{p}'') \right]^{-1}$
4	-	$\left[P_0 - 2m_1 - E_1(\vec{p}') - E_2(\vec{p}') \right]^{-1} \left[\frac{1}{2} P_0 - m_1 - E_1(\vec{p}') - E_1(\vec{p}'') - E_2(\vec{p}' - \vec{p}'') \right]^{-1}$
5	+	$\left[\frac{1}{2} P_0 - m_2 - E_1(\vec{p}'') - E_2(\vec{p}') - E_2(\vec{p}' - \vec{p}'') \right]^{-1} \left[\frac{1}{2} P_0 - m_1 - E_1(\vec{p}'') - E_1(\vec{p}') - E_2(\vec{p}' - \vec{p}'') \right]^{-1}$

$$\begin{aligned}
6 & + \left[P_0 - 2m_1 - E_1(\vec{p}') - E_2(\vec{p}') \right]^{-1} \left[\frac{1}{2} P_0 - m_1 - E_1(\vec{p}'') - E_2(\vec{p}') - E_2(\vec{p}' - \vec{p}'') \right]^{-1} \\
7 & \left[P_0 - 2m_2 - E_1(\vec{p}') - E_2(\vec{p}') \right]^{-1} \left[P_0 - 2m_2 - E_1(\vec{p}'') - E_2(\vec{p}'') \right]^{-1} \\
8 & \left[P_0 - 2m_2 - E_1(\vec{p}') - E_2(\vec{p}') \right]^{-1} \left[P_0 - 2m_2 - E_1(\vec{p}'') + E_2(\vec{p}'') \right]^{-1} \\
9 & \left[P_0 - 2m_1 - E_1(\vec{p}') + E_2(\vec{p}') \right]^{-1} \left[P_0 - 2m_1 + E_1(\vec{p}'') - E_2(\vec{p}'') \right]^{-1} \\
10 & \left[P_0 - 2m_1 - E_1(\vec{p}') - E_2(\vec{p}') \right]^{-1} \left[P_0 - 2m_1 - E_1(\vec{p}'') - E_2(\vec{p}'') \right]^{-1} \\
11 & + \left[P_0 - 2m_2 - E_1(\vec{p}'') - E_2(\vec{p}'') \right]^{-1} \left[\frac{1}{2} P_0 - m_2 - E_1(\vec{p}') - E_2(\vec{p}'') - E_2(\vec{p}' - \vec{p}'') \right]^{-1} \\
12 & + \left[P_0 - 2m_1 - E_1(\vec{p}'') - E_2(\vec{p}'') \right]^{-1} \left[\frac{1}{2} P_0 - m_1 - E_1(\vec{p}') - E_1(\vec{p}'') - E_2(\vec{p}' - \vec{p}'') \right]^{-1} \\
13 & - \left[\frac{1}{2} P_0 - m_1 - E_1(\vec{p}') - E_1(\vec{p}'') - E_2(\vec{p}' - \vec{p}'') \right]^{-1} \left[\frac{1}{2} P_0 - m_2 - E_1(\vec{p}') - E_2(\vec{p}'') - E_2(\vec{p}' - \vec{p}'') \right]^{-1} \\
14 & - \left[\frac{1}{2} P_0 - m_1 - E_1(\vec{p}') - E_2(\vec{p}'') - E_2(\vec{p}' - \vec{p}'') \right]^{-1} \left[\frac{1}{2} P_0 - m_2 - E_1(\vec{p}') - E_2(\vec{p}'') - E_2(\vec{p}' - \vec{p}'') \right]^{-1} \\
15 & - \left[P_0 - 2m_2 - E_1(\vec{p}'') - E_2(\vec{p}'') \right]^{-1} \left[\frac{1}{2} P_0 - m_2 - E_1(\vec{p}'') - E_1(\vec{p}') - E_2(\vec{p}' - \vec{p}'') \right]^{-1} \\
16 & - \left[P_0 - 2m_1 - E_1(\vec{p}'') - E_2(\vec{p}'') \right]^{-1} \left[\frac{1}{2} P_0 - m_1 - E_1(\vec{p}') - E_2(\vec{p}'') - E_2(\vec{p}' - \vec{p}'') \right]^{-1}
\end{aligned}$$

REFERENCIAS

1. inicialmente o termo logarítmo, foi mostrado, é nulo ($E_F \alpha^2 (m_e/m_\mu) \ln(m_\mu/m_e)$) - Phys. Rev. Lett. 41, 1088 (1978). Recentemente o cálculo do termo $\alpha^2(m_e/m_\mu) E_F$ foi completado (SLAC - PUB 2885 -

Feb 1982). Para outras referências veja Bodwin - Yennie Phys. Rep. 43 (1978).

2. Barbieri-Remiddi Nuclear Phys. B 141, 413 (1978).

3. Susana Keinecke - Tese de Mestrado.