Revista Brasileira de Física, *Vol. 12,* Nº *3, 1982*

Campos Projetores na Formulação de Dinbmicas Vinculadas
I — Dinâmicas Lagrangeanas

C. MARCIO DO AMARAL e P. PITANGA

Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro — Brasil

Recebido em **20/2/82**

With aid of a configuration-velocity - dependent projector field, constructed with the constraint conditions, we stablish the fundamental-of a geometric model for classical constrained Lagrangian dynamics. The projector behaves as a singular metric field. Only constraints which are homogeneous of the first degree in the velocities, are considered. A generalized variational Hamiltonian principle is stablished as a function of the projector field. The formalism developed can be the starting point for the construction of Hamiltonian constrained formalis.

Com o auxílio de um campo projetor, dependente de configuração-velocidade, construido com as condições de vínculo, estrutura-se os fundamentos de um modelo geométrico para dinâmicas Lagrangeanas clãssicas. O projetor tem as propriedades de um campo métrico singular. Somente são considerados, vínculos homogêneos do primeiro grau, nas velocidades. Um principio variacional generalizado, do tipo Hamilton, dependente do campo projetor, é estabelecido. O formalismo Lagrangeano desenvolvido, pode ser ponto de partida para a construção de formalismos Hamiltonianos vinculados.

1. INTRODUÇAO

O comportamento de sistemas dinâmicos vinculados constitue atualmente importante área de pesquisa[1]. Normalmente os vínculos são utilizados para a eliminação de variáveis redundantes ou são associados a multiplicadores de Lagrange[2]. No primeiro caso, a eliminação pode destruir simetrias inerentes à representação de coordenadas. No segundo caso, a conveniência de uma posterior quantização envolverá dificuldades, pois são nulos os momenta canonicamente conjugados aos multiplicadores. Formalismos analíticos isentos desses inconvenientes foram construidos para sístemas holÔnomos[3]. Como a presença de condições subsidiárias torna as estruturas dinâmicas particularmente sensíveis a processos de geometrização[4], é conveniente a construção de formalismos analíticos dotados de conteúdo geométrico e extensíveis ao caso não holônomo.

O objetivo do presente trabalho é a construção de um formalismo Lagrangeano, dotado de características geométricas, que descreva sistemas clássicos, restritos por vínculos de configuração-velocidade. Nessa construção não se torna necessária a eliminação de variáveis redundantes. A geometrização é introduzida no momento em que se reinterpreta a família de equações vinculares como uma família de hipersuperfícies imersas no espaço irrestrito de configuração-velocidade. Uma derivação direcional, em velocidades, dessas hipersuperfícies, gera um campo matricial dependente de configuração-velocidade. Esse campo matricial é interpretado geometricamente como um operador que associa o referencial de laboratório a uma família de $r \leq N$, campos vetoriais, linearmente independentes, definidos na região interseção, D, das r hipersuperfícies; N sendo a dimensão do espaço de configuração irrestrito da dinâmica. Esses r campos vetoriais foram denominados campos vinculares. A família de campos vinculares é completada por uma família, que lhe é ortogonal, de $N-r$ campos vetoriais linearmente independentes, definidos em D. Com essa construção fica associado a cada ponto de D um referencial vetorial, N-dimensional, onde r dos vetores são vinculares. Os campos vinculares juntamente com seus recíprocos, permitem a construção unívoca deumcampo projetor, equivalente2 existência de vínculos na descrição dinâmica. Construindo o campo projetor, torna-se possível, com seu auxilio, definir deslocamentos infinitesimais consistentes com as condições de vínculo.

Somente consideramos vínculos homogêneos do primeiro grau nas velocidades, a fim de que a geometrização independa da escolha do parâmetro. Demonstra-se que as velocidades cinematicamente admissíveis são ortogonais, localmente, aos campos vinculares. Formula-se um princípio variacional integral, dependente linearmente do projetor e válido, tanto para sistemas holônomos, quanto não-holônomos. As equações variacionais obtidas, coincidem no caso holônomo com as usuais da literatura[2], e, no caso não holônomo, com as equações obtidas por Wittaker[5] e por Saletan[6], mas sem as dificuldades por eles assinaladas.

O modelo geométrico construido é métrico e a métrica é, em geral, dependente de configuração-velocidade.

2. REFERENCIAL DE LABORATORIO

Consideremos um sistema de A partículas em interação. Independentemente da existência de vínculos, vamos definir o espaço irrestrito de configuração do sistema como a totalidade dos pontos de um espaço Euclidiano real, E_N, N-dimensional, N = 3A, reticulado por coordenadas cartesianas ortogonais, x^ν, $\nu = 1, \ldots, N$.

Juntamente com a coordenação associamos ao E_N uma família de N vetores ortonormais $\{e_\nu\}$, independentes dos x^ν, que denominaremos referencial de laboratório. Nessa base é possível associar, de modo biunívoco, cada configuração do sistema a um vetor cartesiano N-dimensional:

$$\vec{x} = \sum_{\nu=1}^{N} x^\nu e_\nu \ . \tag{2.1}$$

Em um dado instante t, a totalidade das configurações permitidas ou não, será representada pelo conjunto dos vetores da forma,

$$\vec{x}(t) = \sum_{\nu=1}^{N} x^\nu(t) e_\nu \ . \tag{2.2}$$

Esse conjunto define o espaço de configuração irrestrito, $E_N(t)$. A derivação temporal do $E_N(t)$ permitirá definir um espaço vetorial Euclidiano, $\dot{E}_N(t)$, coordehado cartesianamente que chamaremos espaço irrestrito de velocidade do sistema, constituido pela totalidade dos vetores cartesianos da forma:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \sum_{\nu=1} x^{\nu}(t)e_{\nu} \quad , \tag{2.3}$$

onde $\dot{x}^{\nu}(t) = \frac{dx^{\nu}(t)}{dt}$ e onde $\{e_{\nu}\}$ é a mesma base presente em (2.1). O produto cartesiano $E_N(t) \times \dot{E}_N(t) = \varepsilon(t)$, define o espaço de configuração-velocidade, irrestrito, do sistema.

Não é difícil perceber-se que o movimento é representável, geometricamente, por uma família F, de curvas que interceptam de modo simples a região $D(t)$, do $\varepsilon(t)$, se no instante t_0, interceptam a região $D(t_0)$, lugar dos pontos $\{x^{\nu}(t_0), \dot{x}^{\nu}(t_0)\}$, interseção dos vínculos. O movimento transforma $D(t_0)$ em $D(t)$.

Cada curva da família F é caracterizada no instante t_0, pelos 2N parâmetros $(x^{\nu}(t_0), \dot{x}^{\nu}(t_0))$. Cada curva de F intercepta a região $D(t)$, no instante t, em um só ponto. Essa é a descrição do observador de laboratório, representado geometricamente pelos N vetores linearmente independentes $\{e_{\nu}\}$, constantes, indicados em (2.2).

3. O CAMPO DE REFERENCIAIS VINCULARES

Suponhamos o sistema dinâmico representado pela Lagrangeana $L(x^{\nu},\dot{x}^{\nu},t)$, $\nu = 1,\ldots,N$, e sujeito a r equações subsidiárias definidas em $E_N(t) \times \dot{E}_N(t) = \xi(t)$:

$$\phi^{J}(x^{\nu},\dot{x}^{\nu},t) = 0 \quad , \quad J = 1,\ldots,r \leqslant N \ . \tag{3.1}$$

admitidas contínuas, com derivadas contínuas nos seus argumentos. Geometricamente as $\phi^J = 0$, podem ser interpretadas como hipersuperfícies imersas em $\xi(t)$. A existência de (3.1), condiciona a que todo ponto de configuração-velocidade, compatível com a dinâmica, pertença à região intereseção $D(t)$, dessas r hipersuperfícies.

No presente trabalho representaremos os vínculos na forma (3.1), válida tanto para condições holônomas quanto não-holônomas. As equaçoes variacionais de movimento serão obtidas por variações de uma integral de ação†, $A(\Gamma)$, funcional das trajetórias cinematicamente compatíveis com as condições subsidiárias (3.1). Como condições funcionais restritas a $A(\Gamma)$, imporemos:

a) $A(\Gamma)$ deverá ser um escalar relativamente ao grupo de transformações de coordenadas

$$x'^{\nu} = x'^{\nu}(x^{\mu}) \quad , \tag{3.2}$$

a jacobiano não nulo, com derivadas continuas e que não restrinjam o parâmetro t;

b) A Lagrangeana $L(x^{\nu},\dot{x}^{\nu},t)$, integrando de $A(\Gamma)$, deverá gerar uma matriz não singular, contínua em todo o $D(t)$, com elementos de matriz da forma:

$$(L(x,\dot{x}))_{\mu\nu} = \left\{\frac{\partial^2 L(x,\dot{x})}{\partial\dot{x}^{\mu}\,\partial\dot{x}^{\nu}}\right\} \quad ; \quad \mu,\nu = 1,\ldots,N \quad ; \tag{3.3}$$

c) São admitidas condições esclerônomas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial t} &= 0 \ , \\ \frac{\partial \phi^{J}}{\partial t} &= 0 \ , \ J = 1,\ldots,r \ . \end{aligned} \tag{3.4}$$

Decorre de (a), que a Lagrangeana L é necessariamente um escalar face às (3.2). A restrição (b), que é invariante por (3.2), garante uma correspondência biunivoca entre as velocidades e os momenta. Também como decorrência de (a), as hipersuperfícies (3.1) serão escalares por (3.2), já que nesta hipótese, Lagrangeanas estendidas via método λ de Lagrange, permanecerão escalares.

Como é sabido[7], operadores $\partial/\partial\dot{x}^{\mu}$, quando aplicados a funções escalares, $f(x^{\nu},\dot{x}^{\nu},t)$, geram vetores covariantes por transformações do tipo (3.2). Deste modo, com os r escalares (3.1) podemos gerar r contravetores, $\{e^{J}(x^{\nu},\dot{x}^{\nu})$, de componentes:

† Vide Capítulo VI.

$$\frac{\partial\phi^{J}(x^{\nu},\dot{x}^{\mu})}{\partial\dot{x}^{\mu}} = S^{J}_{\mu}(x^{\nu},\dot{x}^{\nu}) \equiv S^{J}_{\mu} ,$$

cuja representação na base de laboratório é:

$$\mathbf{e}^{J}(x^{\nu},\dot{x}^{\nu}) = \sum_{\mu}^{N} S^{J}_{\mu} e^{\mu} , \quad J = 1,\dots,r \leq N ; \tag{3.5}$$

com

$$e^{\mu} = \sum_{\nu=1}^{N} e_{\nu}\, \delta^{\mu\nu}$$

onde

$$\delta^{\mu\nu} = \begin{cases} 1 \text{ se } \mu = \nu \\ \\ 0 \text{ se } \mu \neq \nu \end{cases}$$

Como os r vínculos (3.1) são admitidos distintos em cada ponto do $D(t)$, os $\{e^{J}(x^{\nu},\dot{x}^{\nu})\}$ não constituem um campo de bases (exceto no caso $r=N$). Então para gerar em cada ponto $\{x^{\nu}(t),\dot{x}^{\nu}(t)\}$ de $D(t)$, uma base local, vamos completá-los com $(N-r)$ vetores $\{e^{j}(x^{\nu},\dot{x}^{\nu})\}$, linearmente independentes, que constituem uma família $(N-r)$-dimensional, ortogonal à família r-dimensional local, $\{e^{J}(x^{\nu},\dot{x}^{\nu})\}$. A ortogonalidade local dessas duas sub-famílias será representada pela métrica:

$$(e^{j}(x,\dot{x})\,|\,e^{J}(x,\dot{x})) = g^{jJ}(\dot{x},\dot{x}) = 0 \tag{3.6}$$

$j = r+1,\dots,N$; $J = 1,\dots,r$; para todo $(x,\dot{x})$ do $D(t)$.

Na base de laboratório, representaremos os $N-r$ campos $e^{j}(x,\dot{x})$, na forma:

$$e^{j}(x^{\nu}(t),\dot{x}^{\nu}(t)) = \sum_{\mu=1}^{N} S^{j}(x^{\nu},\dot{x}^{\nu})_{\mu}\, e^{\mu} \equiv \sum_{\mu=1}^{N} S^{j}_{\mu}\, e^{\mu} \tag{3.7}$$

com $j = r+1,\dots,N$.

Por outro lado (3.5), (3.6) e (3.7) dão:

$$(e^{j}(x,\dot{x})\,|\,e^{J}(x,\dot{x}))$$

$$= \sum_{\mu,\nu=1}^{N} S^{j}_{\mu} S^{J}_{\nu} \delta^{\mu\nu} =$$

$$= \sum_{\mu=1}^{N} S^{j}_{\mu} S^{J\mu} = g^{iJ}(x,\dot{x}) = 0 \qquad (3.8)$$

onde $\delta^{\mu\nu} = (e^{\mu}|e^{\nu})$ e onde:

$$\sum_{\nu=1}^{N} S^{J}(x,\dot{x})_{\nu}\ \delta^{\mu\nu} = S^{J\mu}(x,\dot{x}) \ .$$

De $e^{\mu} = \sum_{\nu=1}^{N} \delta^{\mu\nu} e_{\nu}$, vê-se que $(e_{\mu}|e_{\nu}) = \delta_{\mu\nu}$ reciproco do $\delta^{\mu\nu}$.

De modo análogo, o produto escalar local de dois campos vinculares será:

$$(e^{J}(x,\dot{x}) \,|\, e^{K}(x,\dot{x})) = \sum_{\mu,\nu=1} \frac{\partial\phi^{J}(x,\dot{x})}{\partial\dot{x}^{\mu}} \frac{\partial\phi^{K}(x,\dot{x})}{\partial\dot{x}^{\nu}} \delta^{\mu\nu}$$

$$= \sum_{\mu=1}^{N} S^{J}_{\mu} S^{K\mu} = g^{JK}(x,\dot{x}) \ , \qquad (3.9)$$

Como os r vetores $\{e^{J}(x,\dot{x})\}$ são linearmente independentes, a matriz r dimensional construida com os $g^{JK}(x,\dot{x})$ é inversível em cada ponto de $D(t)$. Os elementos de matriz da inversa serão representados como $g_{JK}(x,\dot{x})$ e, naturalmente, devem respeitar à condição:

$$\sum_{K=1}^{r} g^{JK} g_{KL} = g^{J}{}_{L} = \delta^{J}{}_{L} \ , \qquad (3.10)$$

onde $\delta^{J}{}_{L}$ é o símbolo de Kronecker misto. Com o auxilio de $g_{JK}(x,\dot{x})$, podemos definir os campos vinculares covariantes:

$$e_{J}(x,\dot{x}) = \sum_{K=1}^{r} g_{JK} e^{K}(x,\dot{x}) \qquad (3.11)$$

onde os $e^{K}(x,\dot{x})$ são contravariantes.

Consequentemente:

$$g_{JK}(x,\dot{x}) = (e_J(x,\dot{x})|e_K(x,\dot{x})) = \sum_{\mu,\nu=1} s_{J\mu}s_{K\nu}\,\delta^{\mu\nu} =$$

$$= \sum_{\mu=1}^{N} s_{J\mu}s_K{}^{\mu} \tag{3.12}$$

De (3.11) tem-se

$$\sum_{J=1}^{r} s^J{}_\mu g_{JK}(x,\dot{x}) = s_{K\mu}(x,\dot{x}) \tag{3.13}$$

As métricas $g^{JK}(x,\dot{x})$, $g_{JK}(x,\dot{x})$, bem como os contravetores $e^J(x,\dot{x})$ e os covetores $e_K(x,x)$, são decorrentes da existência das hipersuperfícies (escalares) (3.1) e da postulação do referencial de laboratório. A independência linear dos $\{e^J(x,\dot{x})\}$, ou dos seus recíprocos $e_J(x,\dot{x})$, permite gerar em todo o $D(t)$, a cada t, uma base parcial que, completada com os $\{e^J(x,\dot{x})\}$, constitue um campo de referenciais locais. A existência desse campo referencial é, como se verá, bastante conveniente para a análise local da dinâmica de sistemas sujeitos aos vínculos (3.1). A presença dos campos vinculares com a consequente construção do referencial local caracteriza, localmente, o observador. Os vínculos, na sua globalidade são descritos pelo observador de laboratório, enquanto que o observador associado ao referencial local fornece uma descrição diferencial da vinculação. A conexão entre o observador de laboratório $\{e^\mu\}$ e a classe de observadores locais, $\{e^J(x,\dot{x})\,;\ e^J(x,\dot{x})\}$, é definida pelas relações (3.5) e (3.7), mas enquanto as (3.5) são bem determinadas a partir da r-hipersuperfícies (3.1), as (3.7) têm apenas o caráter de completeza.

4. AS CONDIÇÕES DE HOMOGENEIDADE

Consideremos somente vínculos, (3.1), que sejam funções homogêneas do primeiro grau, positivas, nas velocidades. O caso de vínculos homogêneos lineares nas velocidades, usual na mecânica, será um caso apenas particular. A condição de homogeneidade tem implicações importantes, pois é necessária para que a geometrização da dinâmica seja independente da parametrização. Nestas condições, as (3.1) devem satisfazer às restrições:

$$\phi^J(x^\nu,(\alpha\dot{x}^\nu)) = \alpha\phi^J(x^\nu,\dot{x}^\nu) \quad , \tag{4.1}$$

com $\alpha>0$.

Os campos vinculares, como consequência de (4.1), serão funções homogêneas do grau zero e isto leva a que as funções $g_{JK}(x^\nu,\dot{x}^\nu)$, também o sejam. A independência de uma escolha de parâmetro, permite que se associe ao espaço local, gerado pelos campos $e^J(x^\nu,\dot{x}^\nu)$, um caráter geométrico, intrínseco, do tipo Finsler, pois o $g_{JK}(x^\nu,\dot{x}^\nu)$ pode ser interpretado como uma métrica dependente de posição e velocidade. Entretanto, se os vínculos (3.1) forem holônomos, ou não holônomos homogêneos lineares nas velocidades, os campos vinculares serão da forma $e^J(x^\nu)$ e, consequentemente, a métrica é da forma $g_{JK}(x^\nu)$. Neste caso a métrica resultante é do tipo Riemann.

A existência da base local, $\{e^J(x^\nu,\dot{x}^\nu);\ e^j(x^\nu,\dot{x}^\nu)\}$, fornece uma coordenação local, $\{x^J,x^j\}$, definida a partir da coordenação de laboratório por:

$$dx^J(t) = \sum_{\mu=1}^{N} S^J_\mu \; dx^\mu(t) \quad ,$$

$$dx^j(t) = \sum_{\mu=1}^{N} S^j_\mu \; dx^\mu(t) \quad . \tag{4.2}$$

Um deslocamento infinitesimal $\vec{dx}$ é descritível tanto na base de laboratório quanto na base local:

$$\vec{dx} = \sum_1^N dx^\nu e_\nu = \sum_{r=1}^{N} dx^j e_j(x,\dot{x}) + \sum_1^r dx^J e_J(x,\dot{x}) \tag{4.3}$$

A norma de $\vec{dx}$, pode ser expressa, seja no referencial de laboratório, seja no referencial local:

$$ds^2 = (\vec{dx}|\vec{dx}) = \sum_{\mu,\nu=1}^{N} dx^\mu dx^\mu \delta_{\mu\nu} =$$

$$= \sum_{J,K=1}^{r} dx^J dx^K g_{JK}(x^\nu,\dot{x}^\nu) + \sum_{j,\ell=r+1}^{N} dx^j dx^\ell g_{j\ell}(x^\nu,\dot{x}^\nu) \quad . \tag{4.4}$$

(4.4) pode ser concisamente representada como:

$$ds^2 = (\vec{dx}|\vec{dx}) = \underset{\sim}{ds}^2 + \underset{\approx}{ds}^2 . \tag{4.5}$$

Os deslocamentos $\underset{\sim}{\vec{dx}}$ e $\underset{\approx}{\vec{dx}}$ são ortogonais:

$$(\underset{\sim}{\vec{dx}}|\underset{\approx}{\vec{dx}}) = 0 . \tag{4.6}$$

As hipersuperfícies (3.1), condicionadas pela homogeneidade do primeiro grau nas velocidades, levam às condições:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial\phi^J}{\partial\dot{x}^\nu}\,\dot{x}^\nu &= \sum_{\nu}^{N} S^J_\nu\,\dot{x}^\nu = \\ &= (e^J(x,\dot{x})\,|\dot{x}) = 0, \quad J = 1,\ldots,r . \end{aligned} \tag{4.7}$$

A (4.7) evidencia que a cada instante, um sistema dinâmico sujeito aos vínculos (3.1), deve ser tal, que sua velocidade seja ortogonal aos campos vinculares naquele instante[7]. Isso obriga a que os deslocamentos admissíveis, $\underset{\approx}{dx}^\nu = \underset{\approx}{k}^\nu(t)dt$, bem como os virtuais $\delta\underset{\approx}{x}^\nu(t)$, sejam ortogonais aos campos vinculares:

$$\begin{aligned} (e^J(x,\dot{x})\ |\ \underset{\approx}{\vec{dx}}) &= 0 \\ (e^J(x,\dot{x})\ |\ \underset{\approx}{\vec{\partial x}}) &= 0 \end{aligned} \tag{4.7'}$$

De *(4.7)* e na coordenação local, vê-se que $\underset{\approx}{\vec{\delta x}}(t)$ têm somente componentes não nulas, do tipo $\{\delta x^j(t)\}$, isto é, serão nulas suas componentes $\delta x^J(t)$:

$$\delta x^J(t) = 0 \quad , \ J = 1,\ldots,r \quad . \tag{4.8}$$

De *(4.2)* temos:

$$\begin{aligned} \delta x^J(t) &= \sum_{\mu=1}^{N} S^J_\mu\,\underset{\approx}{\delta x}^\mu = 0 \\ \delta x^j(t) &= \sum_{\mu=1}^{N} S^j_\mu\,\underset{\approx}{\delta x}^\mu \end{aligned} \tag{4.9}$$

Equações variacionais de dinâmicas restritas por vínculos da forma (3.1) devem respeitar condições locais do tipo (4.9).

A correspondência bi-univoca entre as bases $\{e^{\mu}\}$ e $\{e^{J}(x^{\nu}(t), \dot{x}^{\nu}(t))\}$ permite, a cada instante una inversão das *(4.2)*:

$$\delta x^{\mu}(t) = \sum_{j=r+1}^{N} S^{\mu}_{\cdot j}\, \delta x^{j}(t) + \sum_{J=1}^{r} S^{\nu}_{J}\, \delta x^{J}(t) \ .$$

Mas, por (4.9), $\delta x^{J}(t) = 0$, logo:

$$\underset{\sim}{\delta x}^{\mu}(t) = \sum_{j=r+1}^{N} S^{\mu}_{\cdot j}\, \delta x^{j}(t) \ . \qquad (4.10)$$

As *(4.10)* implicam em que o observador de laboratório somente pode construir deslocamentos $\underset{\sim}{\delta x}^{\mu}(t)$, pois deslocamentos da forma

$$\underset{\sim}{\delta x}^{\mu} = \sum_{J=1}^{r} S^{\mu}_{J}\, \delta x^{J}(t) \ . \qquad (4.11)$$

são incompatíveis com os campos vinculares naquele instante.

A base local $\{e^{J}(x^{\nu},\dot{x}^{\nu}), e^{j}(x^{\nu},\dot{x}^{\nu})\}$ introduz, por sua própria estrutura, uma partição do sistema de coordenadas local em coordenadas do tipo $\{x^{j}\}$ e coordenadas do tipo $\{x^{J}\}$. Os deslocamentos admissíveis e as velocidades adrnissiveis, estão totalmente imersos no espaço descrito pelas coordenadas do tipo $\{x^{j}\}$.

É conveniente a construção de operadores dinâmicos que realizem essa partição de modo independente do sistema de coordenadas. Estes operadores, são os campos projetores que discutiremos a seguir.

5. OS CANIPOS PROJETORES

Por conveniência formal, representemos os campos vinculares contravariantes e^{J}, e os covariantes, e_{J}, respectivamente por:

$$\begin{aligned} e^{J}(x,\dot{x}) &\to |e^{J}) \ , \\ e_{J}(x,\dot{x}) &\to |e_{J}) \ . \end{aligned} \qquad (5.1)$$

Representemos seus transpostos:

$$(e^J| = |e^J)^T \; ,$$
$$(e_J| = |e_J)^T \; . \qquad (5.1')$$

Os campos complementares, $e^J(x,?)$ e $e_J(x,\dot{x})$ terão representação análoga. O produto escalar de $e^J(x,?)$ por^3 $e^K(x,\dot{x})$ será indicado, como em (3.9):

$$(e^J|e^K) = g^{JK}(x,\dot{x}) \equiv g^{JK}$$

De (3.5) e (3.11), tem-se

$$|e^J) = \sum_{\nu=1}^{N} S^J_\nu |e^\nu)$$
$$|e_K) = \sum_{\nu=1}^{N} S_{K\nu} |e^\nu) \; , \qquad (5.2)$$

onde

$$|e_K) = \sum_{L=1}^{r} g_{KL} |e^L)$$
$$|e^\nu) = \sum_{\mu=1}^{N} \delta^{\mu\nu} |e_\mu) \; .$$

Transpondo (5.2), tem-se

$$(e^J| = \sum_{\nu=1}^{N} S_\nu{}^J (e^\nu|$$

e

$$(e_K| = \sum_{\nu=1}^{N} S_{K\nu} (e^\nu| \; . \qquad (5.3)$$

Construamos o produto escalar reduzido:

$$\sum_{J=1}^{r} S^J_\nu \, S_{J\mu} = \sum_{J,K=1}^{r} S^J_\nu \, S^K_\mu \, g_{JK} = Q_{\nu\mu}(x,\dot{x}) \qquad (5.4)$$

Os $\{Q_{\mu\nu}(x,\dot{x})\}$ constituem as componentes, na base de laboratório, do operador $Q(x,\dot{x})$, cuja representação na base local é:

$$Q(x,\dot{x}) = \sum_{J,K=1}^{r} |e^J) g_{JK} \, (e^K| =$$

$$= \sum_{K=1}^{r} |e_K)\ (e^K| = \sum_{J,K=1}^{r} |e_J) g^{JK}\ (e_K| \ . \qquad (5.5)$$

Na base de laboratório, $\{e^\nu\}$, os elementos de matriz de $Q(x,\dot{x})$ são:

$$(e_\mu|Q|e_\nu) = (e_\mu|e^J)\ g_{JK}\ (e^K|e_\nu) =$$

$$= \sum_{J,K,=1}^{r} S^J\ g_{JK}\ S^K_\nu = Q_{\mu\nu}(x,\dot{x}) \ .$$

Na base local, $\{e^J(x,\dot{x}), e^j(x,\dot{x})\}$, teremos

$$(e^M|Q|e^N) = \sum_{J,K=1}^{r} (e^M|e^J)\ g_{JK}\ (e^K\ |\ e^N) =$$

$$= \sum_{J,K} g^{MJ}\ g_{JK}\ g^{KN} = g^{MN} \qquad (5.6)$$

Então, os elementos de matriz do operador Q , na sub-base $\{e^J(x,\dot{x})\}$, coincidem com os $g^{JK}(x,\dot{x})$.

Analogamente obtemos:

$$(e_J|Q|e_K) = g_{JK} \quad ,$$
$$(e^J|Q|e_K) = g^J_K = {}^J_K \ . \qquad (5.7)$$

Também se verifica facilmente que:

$$(e^J|Q|e_K) = Q^{Jj}(x,\dot{x}) = 0 \qquad (5.8)$$

para todo $J = 1,\ldots,r$; $j = r+1,\ldots,N$.

Também valem:

$$(e^j|Q|e^k) = Q^{jk}(x,\dot{x}) = 0 \ .$$

As condições (5.8) são consequência direta da ortogonalidade das sub-bases $\{e^J(x,\dot{x})\}$ e $\{e^j(x,\dot{x})\}$.

Uma propriedade fundamental do operador Q é a da idem- potência, isto é:

$$Q^2 = Q \quad . \tag{5.9}$$

Com os vetores $e^J(x,\dot{x})$, da sub-base complementar, podemos construir um outro operador idem-potente, de componentes:

$$\Lambda_{\mu\nu}(x,\dot{x}) = \sum_{j,k=r+1}^{N} S^j_\mu S^k_\nu g_{jk}, \tag{5.10}$$

onde

$$g_{jk}(x,\dot{x}) = (e_j e_k) \quad .$$

Na forma independente da escolha de base a (5.10) se escreverá:

$$\Lambda(x,\dot{x}) = \sum_{j,k=r+1}^{N} |e^j) g_{jk} \quad (e^k| =$$

$$= \sum_{j=r+1}^{N} |e^j)(e_j| \quad . \tag{5.10'}$$

Da completeza da base local $\{e^J(x,\dot{x}),\ e^j(x,\dot{x})\}$ decorre que

$$\Lambda(x,\dot{x}) + Q(x,\dot{x}) = I \quad , \tag{5.11}$$

onde I é o operador identidade.

De (5.11), vê-se que $\Lambda(x,\dot{x})$ é completamente determinado pelo conhecimento do $Q(x,\dot{x})$:

$$\Lambda(x,\dot{x}) = I - Q(x,\dot{x}) \quad . \tag{5.12}$$

O operador Q, que é um campo definido na região $\varepsilon(t)$, é um projetor que admite o subespaço local, gerado pelos $e^J(x,\dot{x})$, como um espaço próprio associado ao autovalor 1. O subespaço local gerado pelos $\{e^j(x,\dot{x})\}$ também é um subespaço próprio de $Q(x,\dot{x})$, mas associado ao autovalor zero:

$$Q(x,\dot{x})\,|e^J) = |e^J) \quad ; \; J = 1,\dots,r$$
$$Q(x,\dot{x})\,|e^j = 0 \quad ; \text{ para } j = r+1,\dots,N \,. \tag{5.13}$$

O campo projetor $Q(x,\dot{x})$, localmente estabelece a partição dos vetores em duas classes: aqueles que podem ser gerados pelos $\{e^j(x,\dot{x})\}$ e aqueles gerados pelos $(e^J(x,\dot{x})\}$. Entretanto a descrição da partição pode ser feita pelo observador de laboratório, já que o projetor $Q(x,\dot{x})$ admite representação bem definido no referencial de laboratório.

Com auxílio do projetor Q, a condição (4.7) pode ser posta na forma:

$$\sum_{\nu=1}^{N} Q^{\mu}(x,x)_{\nu}\dot{x}^{\nu} = 0 \,,$$

ou

$$Q\dot{\vec{x}} = 0 \,. \tag{5.14}$$

Uma velocidade, $\{\dot{x}^{\nu}\}$, arbitrariamente construida pelo observador de laboratório, somente será consistente com a dinâmica, se satisfizer à condição:

$$\dot{\underset{\sim}{x}}^{\mu} = \sum_{=1}^{N} \Lambda^{\mu}(x,\dot{x})_{\nu}\dot{x}^{\nu} = \sum_{\nu=1}^{N} (\delta^{\mu}_{\nu} - Q^{\mu}(x,\dot{x})_{\nu})\dot{x}^{\nu} \,. \tag{5.15}$$

A presença do campo $Q(x,\dot{x})$ corresponde dinamicamente à presença das (3.1). O conhecimento dos vínculos (3.1), permite a construção do campo projetor $Q(x,\dot{x})$, que é tão fundamental para a formulação da dinâmica quanto o campo escalar $L(x^{\nu},\dot{x}^{\nu})$.

O campo projetor $\Lambda(x,\dot{x}) = I-Q(x,\dot{x})$, comporta-se como uma métrica singular para a formulação de produtos escalares compatíveis com as condições vinculares. Um arco elementar, descrito pelo sistema no espaço de configuração e observado no laboratório será, então, da forma:

$$\underset{\sim}{dS}^2 = \sum_{\mu,\nu=1}^{N} d\underset{\sim}{x}^{\mu} d\underset{\sim}{x}^{\nu}\delta_{\mu\nu} = \sum_{\theta,\mu,\rho,\nu=1}^{N} dx^{\theta}\Lambda^{\mu}{}_{\theta}\Lambda^{\nu}{}_{\rho}dx^{\rho}\delta_{\mu\nu} =$$

$$= \sum_{\theta,\rho=1}^{N} dx^{\theta}\Lambda_{\theta\rho}(x,\dot{x})\,dx^{\rho} \tag{5.16}$$

Como $h = I-Q$, teremos:

$$\underset{\sim}{dS}^2 = \sum_{\theta,\rho=1}^{N} (dx^\theta dx^\rho \delta_{\theta\rho} - dx^\theta dx^\rho Q_{\theta\rho}(x,\dot{x})) =$$

$$= dS^2 - \underset{\sim}{dS}^2 \quad , \tag{5.17}$$

onde

$$\underset{\sim}{dS}^2 = \sum_{\theta,\rho=1}^{N} dx^\theta dx^\rho Q_{\theta\rho}(x,\dot{x}) \quad .$$

A presença dos vínculos corrige o dS^2 irrestrito, transformando-o no restrito $dS^2-\underset{\sim}{dS}^2$.

Em particular os deslocamentos infinitesimais instantâneos, compatíveis, deverão satisfazer à condição:

$$\underset{\sim}{\delta x}^\nu = \sum_{\mu=1}^{N} \Lambda^\nu{}_\mu(x,\dot{x})\delta x^\mu \quad , \tag{5.18}$$

onde os δx^μ são arbitrários.

6. O PRINCIPIO VARIACIONAL

Vamos construir equações variacionais de movimentos, oriundos de Lagrangeanas $L(x^\nu,\dot{x}^\nu)$, $\nu = 1,...,N$, e sujeitos, adicionalmente, a r condições subsidiárias da forma (3.1). Estas condições subsidiárias restringem os deslocamentos virtuais infinitesimais à forma (5.18), que representa uma combinação linear de deslocamentos virtuais irrestritos.

A possibilidade de considerar-se deslocamentos virtuais, arbitrários em um problema não holônomo é muito interessante, pois, então, um principio variacional do tipo Hamilton, generalizado, poderá ser formulado sem as dificuldades apresentadas por Whittaker[5] e Rund[7]. No referenciai local os $\underset{\sim}{\delta x}^\nu(t)$ transformam-se por (4.9), em $\delta x^j(t)$, $j = r+1,..,N$, que são arbitrários, consistentes com os campos vinculares locais e a eles ortogonais. Nesse mesmo instante, no referencial local temos $\delta x^J(t) = 0$, $J = 1,...,r$. Seja a integral de ação:

$$A = \int^{t_2} L(x^\nu, \dot{x}^\nu)\,dt \; . \tag{6.1}$$

Consideremos variações, δA com condições de extremos fixos. Podemos decompor a variação δ em variações ortogonais, $\underset{\sim}{\delta} = Q\delta$ e $\underset{\approx}{\delta} = \Lambda\delta = (I-Q)\delta$. Então:

$$\delta A = \underset{\sim}{\delta} A + \underset{\approx}{\delta} A = \int_{t_1}^{t_2} (\underset{\sim}{\delta} + \underset{\approx}{\delta}) L(x^\nu, \dot{x}^\nu)\,dt =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{N} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\nu} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\nu}\right) \left(\underset{\sim}{\delta} x^\nu(t) + \underset{\approx}{\delta} x^\nu(t)\right) dt \; . \tag{6.2}$$

A restrição vincular, impõe $\underset{\sim}{\delta} x^\nu = 0$. Obteremos as equações variacionais fazendo-se, adicionalmente, $\underset{\approx}{\delta} A = 0$, onde:

$$\underset{\approx}{\delta} A(t_2, t_1) = \sum_{\nu=1}^{N} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial x^\nu} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\nu}\right) \underset{\approx}{\delta} x^\nu(t)\,dt = 0, \tag{6.3}$$

com $\underset{\approx}{\delta} x^\nu(t_1) = \delta x^\nu(t_2) = 0$.

De (5.18) vem:

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{N} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial x^\nu} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}\right) \Lambda^\nu(x,\dot{x})_\mu \delta x^\nu(t)\,dt = 0 \; . \tag{6.4}$$

Como os $x(t)$, irrestritos, são arbitrários obtém-se:

$$\sum_{\nu=1}^{N} \left(\frac{\partial L}{\partial x^\nu} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}\right) \Lambda^\nu(x,x)_\mu \; , = 0 \tag{6.5}$$

para $\mu = 1, \ldots, N$

Podemos escrever (6.5) na forma matricial:

$$\sum_{\nu=1}^{N} \Lambda^\nu{}_\mu E_\nu(L) = 0 \; . \tag{6.5'}$$

Como $\Lambda^\nu_\mu(x,\dot{x}) = \delta^\nu{}_\mu - Q^\nu{}_\mu(x,\dot{x})$, podemos escrever as equações de Euler-Lagrange, para sistemas vinculados generalizados, na forma:

$$E_\nu(L(x,\dot{x})) = \lambda_\nu(x,\dot{x}) \; , \tag{6.6}$$

onde a componente, $E_\nu(L(x,\dot{x}))$, do covetor de Euler, é definida como sendo:

$$E_\nu(L(x,\dot{x})) = \frac{L(x,\dot{x})}{\partial x^\nu} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^\nu}\right) . \qquad (6.7)$$

O covetor $h_\nu(x,\dot{x})$, que faz papel de um campo multiplicador de Lagrange generalizado, é definido pela expressão:

$$\lambda_\nu(x,\dot{x}) = \sum_{\nu=1}^{N} Q^\mu(x,\dot{x})_\nu \; E_\mu(L(x,\dot{x})) \quad . \qquad (6.8)$$

As N componentes, λ_ν (x, x), do campo multiplicador de Lagrange não são independentes, devido às (6.8). Como consequência, somente R das suas componentes são independentes. O campo $\lambda_\nu(x,\dot{x})$ é totalmente determinado quando conhecemos. a Lagrangeana irrestrita, $L(x,\dot{x})$ e as (3.1). No referencial local, os $\lambda_\nu(x,\dot{x})$ se escrevem

$$\sum_{\nu=1}^{N} \lambda_\nu S^\nu_J = \lambda_J(x,\dot{x}) \qquad , \; J = 1,\ldots,r \qquad (6.9)$$

A forma local contravariante é obtida contraindo-se com a métrica local $g^{JK}(x,\dot{x})$:

$$\lambda^K = \sum_{L=1}^{r} g^{KL} \lambda_L \quad . \qquad (6.9')$$

O campo vetorial $\vec{\lambda}(x,\dot{x})$, é descrito, na base de laboratório por:

$$\vec{\lambda} = \sum_{\nu=1}^{N} \lambda_\nu e^\nu = \sum_{\substack{\nu=1 \\ J=1}}^{\substack{J=r \\ \nu=N}} \lambda_\nu S^\nu_J e^J =$$

$$= \sum_{J=1}^{r} \lambda_J \, e^J \qquad (6.10)$$

De (6.10), tem-se:

$$\lambda_\nu = \sum_{J=1}^{r} \lambda_J S^J_\nu = \sum_{J=1}^{r} \lambda_J \frac{\partial \phi^J}{\partial \dot{x}^\nu} . \qquad (6.11)$$

Se levarmos (6.11) em (6.6.), obteremos a forma de Whittaker-Saletan[5,6]:

$$E\ (L(x,\dot{x})) = \sum_{J=1}^{r} \lambda_J \frac{\partial\phi^J(x,\dot{x})}{\partial\dot{x}^\nu} \tag{6.12}$$

Entretanto a forma (6.6), além de evidenciar, de modo explícito o caráter geométrico da teoria, é muito conveniente para a construção de modelos dinâmicos de sistemas físicos em interação.

As condições (6.6) e (6.8) mostram, juntamente com (5.14), que:

$$\sum_{\nu=1}^{N} \lambda_\nu \dot{\underset{\sim}{x}}^\nu(t) = 0$$

e, consequentemente (6.13)

$$\sum_{\nu=1}^{N} E_\nu(x,\dot{x})\ \dot{\underset{\sim}{x}}^\nu(t) = 0\ .$$

De (6.6) e de (6.8) e levando-se em conta a independência do $Q(x,\dot{x})$, tem-se

$$\sum_{\nu=1}^{N} Q^\nu{}_\mu E_\nu(L) = \sum_{\nu=1}^{N} Q^\nu{}_\mu \lambda_\nu = \lambda_\mu\ . \tag{6.14}$$

Mas isto apenas quer dizer, que na presença do campo h_μ, somente as componentes E (L), contribuem para o movimento.

Quando os vínculos $\phi^J(x^\nu,\dot{x}^\nu) = 0$, forem integráveis, serão necessariamente da forma

$$\phi^J(x,\dot{x}) = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f^J(x)}{\partial x^\nu}\dot{x}^\nu$$

Mas então

$$S^J(x,\dot{x})_\nu = \frac{\partial\phi^J(x,\dot{x})}{\partial\dot{x}^\nu} = \frac{\partial f^J(x)}{\partial x^\nu}\ , \tag{6.15}$$

onde $f^J(x^\nu) = c^J$ é a forma integrada da $\phi^J(x,\dot{x}) = 0$.

Como consequência, o princípio (6.3) contém o caso não holônomo como particular. Entretanto as variações infinitesimais, δx^μ, são arbitrárias e de mesma natureza, quer o vínculo seja integrável ou não.

7. UMA APLICAÇAO SIMPLES

Como aplicação, simplesmente ilustrativa do método, consideremos um par de partículas puntiformes de mesma massa $m = 1$. A distância relativa, R, das partículas é admitida constante. O sistema é suposto mover-se em um plano vertical, sob ação de um campo gravitacional constante, $\vec{g}$, de modo tal, que a velocidade do centro de massa seja colinear ao vetor $\vec{\ell}$. Procuremos construir as equações de movimento, (6.5), para o sistema, que é um "skate" idealizado. Este sistema está sujeito a dois vínculos, um holônomo, (a), e outro não-holônomo, (b):

(a) $$\frac{1}{2}\left[(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 - \ell^2\right] = 0 \ ;$$

(b) $$\frac{x_2+x_1}{\dot{y}_2+\dot{y}_1} = \frac{x_2-x_1}{y_2-y_1} \ ;$$

onde (x_1,y_1) e (x_2,y_2) são as coordenadas cartesianas do par de partículas e $(\dot{x}_1,\dot{y}_1)$, $(\dot{x}_2,\dot{y}_2)$ são suas velocidades respectivas:

Representando os vínculos (a) e (b) na forma (3.1),

$$\phi^J(x_\nu,\dot{x}_\nu) = 0 \ , \ J = 1,2$$

temos:

(a) $$-(x_2-x_1)\dot{x}_1 + (x_2-x_1)\dot{x}_2 - (y_2-y_1)\dot{y}_1 + (y_2-y_1)\dot{y}_2 = 0$$

(b) $$-(y_2-y_1)\dot{x}_1 - (y_2-y_1)\dot{x}_2 + (x_2-x_1)\dot{y}_1 + (x_2-x_1)\dot{y}_2 = 0 \ .$$

Façamos $(x_2-x_1) = u$; $(y_2-y_1) = v$; $\dot{y}_1 = \dot{x}_3$; $\dot{y}_2 = \dot{x}_4$, obtemos

(a) $$-u\dot{x}_1 - u\dot{x}_2 - v\dot{x}_3 + v\dot{x}_4 = 0$$

(b) $$-v\dot{x}_1 - v\dot{x}_2 + u\dot{x}_3 + u\dot{x}_4 = 0 \ .$$

Os vetores da base local e^J definidos por (3.5),

$$e^J = \sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial\phi^J}{\partial\dot{x}_\nu} e_\nu$$

terão por componentes de laboratório:

$$e^1 \to (-u,u,-v,v) = (S^1_1,\ S^1_2,\ S^1_3,\ S^1_4)$$

$$e^2 \to (-v,-v,u,u) = (S^2_1,\ S^2_2,\ S^2_3,\ S^2_4)$$

e^1 e e^2 têm mesma norma $\sqrt{2(u^2+v^2)}$.
A métrica local $g^{JK} = (e^J\ e^K) = \delta^{JK}$ é ortogonal.

De (5.4) tem-se a matriz representativa do projetor Q na base de laboratório:

$$Q = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & \frac{v^2-u^2}{v^2+u^2} & 0 & -\frac{2vu}{v^2+u^2} \\ \frac{v^2-u^2}{v^2+u^2} & 1 & -\frac{2vu}{v^2+u^2} & 0 \\ 0 & -\frac{2vu}{v^2+u^2} & 1 & -\frac{(v^2-u^2)}{v^2+u^2} \\ -\frac{2vu}{v^2+u^2} & 0 & -\frac{(v^2-u^2)}{v^2+u^2} & 1 \end{vmatrix}$$

Da Lagrangeana irrestrita $L(x^V, \dot{x}^V)$:

$$L = \frac{1}{2}\ (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 + \dot{x}_4^2) - g(x_3 + x_4)$$

e do projetor Q, as (6.5) ficam

$$(1) \qquad \ddot{x}_1 = \frac{\ddot{x}_1}{2} + \frac{v^2-u^2}{2\ell^2}\ \ddot{x}_2 - \frac{2vu}{2\ell^2}\ (\ddot{x}_4 + g)$$

$$(2) \qquad \ddot{x}_2 = \frac{v^2-u^2}{2\ell^2}\ \ddot{x}_1 + \frac{\ddot{x}_2}{2} - \frac{2vu}{2\ell^2}\ (\ddot{x}_3 + g)$$

$$(3) \qquad \ddot{x}_3+g = -\frac{2vu}{2\ell^2}\ \ddot{x}_2 + \frac{(x_3+g)}{2} - \frac{(v^2-u^2)}{2\ell^2}\ (\ddot{x}_4 + g)$$

$$(4) \qquad \ddot{x}_4+g = -\frac{2vu}{2\ell^2}\,\ddot{x}_1 - \frac{(v^2-u^2)}{2\ell^2}\,(\ddot{x}_3 + g) + \frac{(\ddot{x}_4 + g)}{2}$$

Fazendo $B = \dot{x}_1+\dot{x}_2$ e $q = \dot{x}_3+\dot{x}_4$ e adicionando (1) a (2), temos:

$$\dot{B}u + 2vg + v\dot{q} = 0 \, . \qquad \text{I}$$

Subtraindo (1) de (2), temos

$$\ddot{u}v - \ddot{u}v = 0 \, . \qquad \text{II}$$

As equações I e II, juntamente com as equações de vínculo

$$v^2 + u^2 = \ell^2 \qquad \text{III}$$

$$Bv - qu = 0 \qquad \text{IV}$$

determinam as equações de movimento procuradas[8], que coincidem com aquelas obtidas pelo método usual do multiplicador de Lagrange.

8. CONCLUSAO

Tendo sido estabelecidos os fundamentos de um modelo geométrico para sistemas Lagrangeanos, é necessária, por condições de completeza, a extensão ao caso Hamiltoniano. Além disso, a idéia de referencial local, utilizado na descrição local da dinâmica, introduz a necessidade de conectar a descrição entre referenciais vizinhos. Os campos de Gauge têm exatamente este papel, de modo que é de interesse estudar que tipo de correlação pode existir entre a idéia de campo de Gauge e a idéia de campo de referenciais 'locais gerados na descrição de sistemas vinculados. Estes temas estão em desenvolvimento e são objeto de trabalhos em andamento.

REFERÊNCIAS

1. A.Hanson *et al.*, *Constrained Hamiltonian Systems;* Academia Nazionale Dei Lincei, Roma (1976).
2. C. Lanczos, *The Variational Principles of Mechanics;* Toronto (1970).
3. Y.Takahashi, Physica, 31, 205 (1965); M.Schwartz, J.Math.Phys., *5*, 903 (1965); C.Marcio do Amaral, Nuovo Cim., *25*, 817 (1975).
4. P.A.M. Dirac, *General Theory of Relativity*, N.York (1975). *Lectures on Quantum Mechanics*, N. York (1964).
5. E.T.Whittaker, *Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, London (1964).
6. E. J.Saletan *et al.*, Amer. J. Phys., 38, 892 (1970).
7. H. Rund, *The Hamilton-Jacobi Theory in the Calculus of Variations*, N. York (1973); Colloq. International du Centre National de la Recherche Scientifique, Strasbourg (1953).
8. F.Gautmacher, *Lectures in Analytical Mechanics*, Moscow (1970).