Revista Brasileira de Física, Vol. 11, Nº 4, 1981

A Funcão de Feynman-Green em Presença de Quebra Espontânea de Simetria

R. L. GARCIA

Divisão de Estudos Avançados, IAE-CTA, São José dos Campos, SP

Recebido em 1 de Junho de 1981

A Green's function for a wavelike equation with a mass term is calculated, employing eigenvalues and eigenfunctions in hiperbolic coordinates.

É calculada uma função de Green de uma equação do tipo da equação de onda com um termo de massa, empregando-se autovalores e autofunções em coordenadas hiperbólicas.

Pode ocorrer quebra espontânea de simetria, na teoria do campo escalar conformemente invariante, descrita pela lagrangeana[1]

$$\sqrt{-g}\ \left[g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi^*\partial_\beta\phi - \frac{R}{6}\,\phi^*\phi - \frac{\lambda}{6}\,(\phi^*\phi)^2\right], \qquad (1)$$

onde R é a curvatura escalar na métrica $g_{\alpha\beta}$, λ a constante de acoplamento, g = det $g_{\alpha\beta}$ e o campo ϕ é complexo. É então importante o conhecimento da função de Feynmann-Green, $\mathcal{D}(x,x')$, definida pelo limite $\varepsilon\to 0$ da expressão

$$2i\sqrt{-g(x)}\,(\Box_x + \frac{R}{6} + \frac{\lambda}{2}\,\phi_0^2(x) - i\varepsilon)\mathcal{D}_{ab}(x,y) = \delta_{ab}\,\delta(x-y) \quad , \qquad (2)$$

onde $\Box_x$ é o dalembertiano covariante

$$\Box_x\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{-g(x)}}\ \partial_\mu\ (\sqrt{-g(x)}\ g^{\mu\nu}(x)\partial_\nu\phi(x)) \ , \qquad (3)$$

o qual, no plano, em coordenadas cartesianas, tem a forma usual

$$\Box \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{4}$$

Aqui estamos utilizando à notação condensada

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad . \tag{5}$$

Na expressão (2) $\phi_0(x)$ é una solução das equações de movimento oriundas da lagrangeana (1).

Num caso importante a métrica é estática, sendo dada por:

$$\begin{aligned} g_{00} &= -g_{11} = 1 \\ g_{22} &= -\operatorname{sh}^2\chi \\ g_{33} &= -\operatorname{sh}^2\chi \operatorname{sen}^2\Theta \\ g_{\alpha\beta} &= 0 \text{ se } \alpha \neq \beta \end{aligned} \tag{6}$$

Estamos usando coordenadas hiperbólicas que se relacionam com as cartesianas pela expressão (2)

$$\begin{aligned} x^1 &= e^\eta \operatorname{seh}\chi \operatorname{sen}\Theta \cos\phi, \\ x^2 &= e^\eta \operatorname{seh}\chi \operatorname{sen}\Theta \operatorname{sen}\phi, \\ x^3 &= e^\eta \operatorname{seh}\chi \cos\Theta, \\ x^4 &= e^\eta \operatorname{coh}\chi. \end{aligned} \tag{7}$$

É fácil ver que a função que buscamos é da forma

$$D_{ab}(x,y) = \delta ab\, D(x,y) \quad . \tag{8}$$

Como $\phi_0(x)$ podemos escolher uma solução estável[1] das equações de movimento:

$$\phi_0 = \pm \sqrt{3/\lambda} \tag{9}$$

(Na métrica estática existem apenas duas soluções estáveis e ambas são constantes).

Explicitando toda a notação vemos que a função D satisfaz a equação

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} - \frac{1}{\operatorname{seh}^2\chi}\frac{\partial}{\partial\chi}\left(\operatorname{seh}^2\chi\frac{\partial}{\partial\chi}\right) - \frac{1}{\operatorname{seh}^2\chi\operatorname{sen}\Theta}\frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\operatorname{sen}\frac{\partial}{\partial\Theta}\right) - \right.$$

$$\left. \frac{1}{\operatorname{seh}^2\chi\operatorname{sen}^2\Theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{1}{2} - i\varepsilon\right] D(c\ldots\phi,\eta'\ldots\phi') =$$

$$= \frac{\delta(\eta-\eta')\delta(\chi-\chi')\delta(\Theta-\Theta')\delta(\phi-\phi')}{\operatorname{seh}^2\chi\operatorname{sen}\Theta} \qquad (10)$$

Esta equação pode ser resolvida pelo desenvolvimento do progagador D em termos das auto-funções

$$(\partial^2_\eta - \Delta + \frac{1}{2} - i\varepsilon)\phi(\eta,\chi,\Theta,\phi) = A\phi(\eta,\chi,\Theta,\phi) , \qquad (11)$$

onde A corresponde à parte angular do dalembertino $\Box$

$$\Box \equiv \partial^2_\eta - \Delta . \qquad (12)$$

Usando separação de variáveis

$$\phi(\eta,\chi,\Theta,\phi) = \mu_\lambda(\eta)\,\Psi_{\lambda\ell m}(\chi,\Theta,\phi) , \qquad (13)$$

teremos

$$\left[\frac{\partial^2_\eta\mu_\lambda(\eta)}{\mu_\lambda(\eta)} + \frac{1}{2} - A\right] = \frac{\Delta\Psi_{\lambda\ell m}(\chi,\Theta,\phi)}{\Psi_{\lambda\ell m}(\chi,\Theta,\phi)} = -\lambda^2 \qquad (14)$$

A equação

$$\frac{\Delta\Psi_{\lambda\ell m}(\chi,\Theta,\phi)}{\Psi_{\lambda\ell m}(\chi,\Theta,\phi)} = -\lambda^2 \qquad (15)$$

já tem solução conhecida (2,3), resultando um conjunto completo e ortonormalizado de funções $Y_{\lambda \ell m}$

$$\int_0^\infty d\chi \int_0^\pi d\Theta \int_0^{2\pi} d\phi \; \mathrm{sh}^2\chi \; \mathrm{sen}\Theta \; \Psi_{\lambda \ell m}(\chi,\Theta,\phi) \; \bar{\Psi}_{\lambda' \ell' m'}(\chi,\Theta,\phi) = \delta(\lambda-\lambda')\delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'} \tag{16}$$

$$\int_0^\infty d\lambda \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \Psi_{\lambda \ell m}(\chi,\Theta,\phi) \; \bar{\Psi}_{\lambda \ell m}(\chi',\Theta',\phi') = \frac{\delta(\chi-\chi')\delta(\Theta-\Theta')\delta(\phi-\phi')}{\mathrm{seh}^2\alpha \; \mathrm{sen}\Theta} \tag{17}$$

Para completar o nosso problema basta resolver

$$\frac{\partial_\eta^2 \mu_\lambda(\eta)}{\mu_\lambda(\eta)} + \frac{1 - 2A + 2\lambda^2}{2} = 0 \quad . \tag{18}$$

Por analogia com o plano, busquemos a solução na forma $\frac{e^{ik\eta}}{\sqrt{2\pi}}$, o que nos dará

$$A = - k^2 + \frac{1}{2} + \lambda^2 \tag{19}$$

A função de Feynman-Green é portanto

$$D(\eta\ldots\phi') = \frac{1}{4\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \int_{\infty}^{\infty} d\lambda \sum_{\ell=0} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{e^{ik(\eta-\eta')}}{-k^2+\lambda^2+1/2-i\varepsilon} \Psi_{\lambda \ell m}(\chi,\theta,\phi)\bar{\Psi}_{\lambda \ell m}(\chi',\Theta',\phi') \tag{20}$$

Para realizar as somas e integrações que aparecem na equação (20) notemos que[2,3]

$$\Psi_{\lambda \ell m}(\chi,\Theta,\phi) = \frac{|\Gamma(i\lambda+\ell+1)|}{|\Gamma(i\lambda)|} \Phi_{\lambda \ell}(\chi) Y_{\ell m}(\Theta,\phi) \tag{21}$$

onde $Y_{\ell m}$ são os harmônicos esféricos e

$$\Phi_{\ell m}(\chi) = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{seh}\;\chi}} P_{i\lambda-1/2}^{-\ell-1/2} (\mathrm{coh}\chi) \quad , \tag{22}$$

onde $P_{i\lambda-1/2}^{-\ell-1/2}$ é uma função associada de Legendre.

Lembrando a expressão da adição de harmônicos esféricos[4,5]

$$C_\ell^{1/2}(\cos\gamma) = P_\ell(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2\ell+1}\sum_{m=-\ell}^{\ell} Y^*_{\ell m}(\Theta',\phi')Y_{\ell m}(\Theta,\phi) \qquad (23)$$

na qual $C_\ell^{1/2}$ $(\cos\gamma)$ é um polinômio de Gegenbauer, P_ℓ um polinômio de Legendre e o ângulo γ é dado por

$$\cos\gamma = \cos\Theta\cos\Theta' + \operatorname{sen}\Theta\operatorname{sen}\Theta'\cos(\phi-\phi') \ . \qquad (24)$$

Sabemos também que é satisfeito o seguinte teorema de composição[2,3]

$$\frac{2\lambda^2}{\sqrt{2\pi}\ \operatorname{seh}\alpha} P^{-1/2}_{i\lambda-1/2}(\operatorname{coh}\alpha) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(2\ell+1)\,|\Gamma(i\lambda+\ell+1)|^2}{|\Gamma(i\lambda)|^2}\,\Phi_{\lambda\ell}(\chi)\Phi_{\lambda\ell}(\chi')P_\ell(\cos\gamma)$$

(25)

onde o ângulo hiperbólico α tem por expressão

$$\operatorname{coh}\alpha = \operatorname{coh}\chi\operatorname{coh}\chi' - \operatorname{seh}\chi\operatorname{seh}\chi'\cos\gamma \qquad (26)$$

Levando as equações (22) e (25) na equação (20) teremos

$$D(\eta\ldots\phi') = \frac{1}{8i\pi}\int^{+\infty}\int_0^{\infty} \frac{ik(v-v')}{-k^2+\lambda^2+1/2-i\varepsilon}\ \frac{P^{-1/2}_{i\lambda-1/2}(\operatorname{coh}\alpha)}{}$$

(27)

A integral em k pode ser realizada com o auxílio de um contorno no plano complexo, pois o integrando possui polos em

$$k = \pm(\sqrt{\lambda^2+1/2} - i\varepsilon) \ . \qquad (28)$$

Tomemos, primeiramente, $\eta-\eta' > 0$. Neste caso o contorno pode ser fechado por cima, o que nos dá

$$D(\mathrm{V}\ldots\ \phi') = \frac{1}{8\pi}\int^{\infty} d\lambda\lambda^2\ \frac{e^{-i\sqrt{\lambda^2+1/2}\ (\eta-\eta')}}{\sqrt{\quad + 1/2}}\ \frac{P^{-1/2}_{i\lambda-1/2}(\operatorname{coh}\alpha)}{\sqrt{2\pi}\operatorname{seh}\alpha} \qquad (29)$$

Explicitando a expressão da função de Legendre[5] que aparece na equação (29),

$$P^{-1/2}_{i\lambda-1/2}(\cosh\alpha) = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{2}{\pi\,\operatorname{senh}\alpha}}\ \operatorname{sen}\lambda x\ , \tag{30}$$

vemos que a integral (29) pode ser considerada como a transformada de Fourier de uma pseudo-função e pode pois ser realizada com o auxílio da referência 6

$$\begin{aligned} D(\eta\ldots\phi') = \frac{1}{8\pi^2\operatorname{senh}\alpha} \Bigg\{ & \frac{i}{2}\ |\delta(\alpha+\eta-\eta') - \delta(\alpha-\eta'+\eta)| \ + \\ & + P_f\,\frac{\alpha}{2}\,\frac{K_1(\frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2-(\eta-\eta')^2})}{\sqrt{\alpha^2-(\eta-\eta')^2}} \qquad |\alpha|>|\eta-\eta'| \ + \\ & + i\alpha(\eta-\eta')\,\frac{J_1(\frac{1}{2}\sqrt{(\eta-\eta')^2-\alpha^2})}{4\sqrt{(\eta-\eta')^2-\alpha^2}} \ + \\ & + \frac{\pi\alpha}{4}\,P_f\,\frac{N_1(\frac{1}{2}\sqrt{(\eta-\eta')^2-\alpha^2})}{\sqrt{(\eta-\eta')^2-\alpha^2}} \qquad |\alpha|<|\eta-\eta'| \Bigg\} \end{aligned} \tag{31}$$

onde K_1, J_1, N_1 são funções de Bessel e P_f denota pseudo-função.

No caso $\eta-\eta'<0$ o contorno deve ser fechado inferiormente o que simplesmente implica uma permutação entre η e η' na equaçao (31), isto e:

$$\underset{\eta-\eta'>0}{D(\eta,\chi,\Theta,\phi,\eta',\Theta',\phi')} = \underset{\eta-\eta'<0}{D(\eta',\chi,\Theta,\phi,\eta,\chi',\Theta',\phi')} \tag{32}$$

A função de Feynman-Green para quaisquer valores de $\eta-\eta'$ é então

$$D(\eta\ldots\phi') = \frac{\alpha}{8\pi^2\operatorname{senh}\alpha}\Bigg\{ -i\delta\ |\alpha^2-(\eta-\eta')^2| \ +$$

$$+ P_f \frac{1/2\ K_1(\frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2-(\eta-\eta')^2})}{\sqrt{\alpha^2-(\eta-\eta')^2}} \qquad |\alpha|>|\eta-\eta'|$$

$$+ \frac{i\pi}{4}(\eta-\eta') \frac{J_1(\frac{1}{2}\sqrt{(\eta-\eta')^2-\alpha^2})}{\sqrt{(\eta-\eta')^2-\alpha^2}}$$

$$\left. + P_f \frac{\pi}{4} \frac{N_1(\frac{1}{2}\sqrt{(\eta-\eta')^2-\alpha^2})}{\sqrt{(\eta-\eta')^2-\alpha^2}} \qquad |\alpha|<|\eta-\eta'| \right\} \tag{33}$$

Este resultado é completamente análogo ao propagador de bósons massivo[7].

REFERÊNCIAS

1. R.L.Garcia, Rel.Pesq. EAV-012/80, I.A.E. C.T.A., 17 Set.80; 016/ 80 06 Nov 80.
2. N.Ja. Vilenkin, *Fonctions Spéciales et Théorie de La Représentation des Groupes*, Dunod, Paris. 1969.
3. A.A.Grib, B.A.Levitskii, V.M.Mostepanenko, Teor.Mat.Fiz. *19*, 59 (1974); 21 (1974). L.Parker, S.A.Fulling, Phys.Rev. D*9*, 341 (1974) e referências aí citadas.
4. J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley, New York, 1975.
5. I.S.Gradshteyn, I.M.Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press, New York, 1965.
6. J.Lavoine, *Transformation de Fourier des Pseudo-Fonctions avec Tables de Nouvelles Transformées*, Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1963.
7. N.N.Bogolioubov, D.M.Shirkov, *Introduction to the Theory of Quantized Fields*, Johri Wiley & Sons, New York, 1959.