Revista Brasileira de Física, Vol. 11, nº 3, 1981

Convecção Natural em Misturas Ternárias*

GILBERTO MEDEIROS KREMER e LIU KAI

Departamento de Física, Universidade Federal do Paraná, Caixa Postal 1862, 80000 Curitiba, PR.

Recebido em 27 de Maio de 1981

The field equations for a mixture of a viscous fluid, a deformable solid and a non-viscous fluid is studied, based on a linearized theory proposed by Bowen. The fields of density of each constituent, temperature, velocity of each fluid and displacement of the solid are determined, for steady states flow of the mixture between two parallel planes and between two concentric cylinders which are maintainedat different temperatures.

As equações de campo para uma mistura constituída de fluido viscoso, sólido deformável e fluido não viscoso são estudadas com base na teoria linearizada de Bowen. Os campos de densidade de cada constituinte, de temperatura, de velocidade de cada fluido e de deslocamento do sólido, são determinados para o caso de escoamento em estado estacionário entre dois planos paralelos e entre dois cilindros concêntricos mantidos a temperaturas diferentes.

1. INTRODUÇÁO

Normalmente na literatura**, a denominação de *convecção natural* ou *livre* está associada ao escoamento em estado estacionário de um fluido entre dois planos paralelos ou entre dois cilindros concên-

* Auxílio: CNPq (L.K.)

** Vide, por exemplo, Bird *et al.*[1] e Slattery[2].

tricos, mantidos a temperaturas diferentes e sob a ação da força da gravidade.

O objetivo deste trabalho é analisar a convecção natural em misturas constituídas de fluido viscoso, sólido deformável e fluido não viscoso em geometrias idênticas às descritas acima.

Baseamo-nos na teoria linearizada proposta por Bowen[3], supomos que as velocidades dos fluidos e o deslocamento do sólido são pequenos e, em cada geometria, determinamos os campos de temperatura, de densidade de cada constituinte, de velocidade de cada fluido e de deslocamento do sólido.

Mostramos também que a particularização para o caso de escoamento isotérmico de fluido viscoso e sólido deformável, em que não são consideradas as forças de campo externa, conduzem aos resultados de Crochet e Naghdi[4] e Atkin e Craine[5].

2. EQUAÇÕES DE CAMPO E EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS

Para a análise da convecção natural em misturas, necessitamos das seguintes equações de campo, válidas para pontos regulares de uma mistura sem reação química (Bowen[3]):

Balanço de Massa para cada Constituinte

$$\dot{\rho}_\alpha + \rho_\alpha \operatorname{div} v_\alpha = 0 \qquad (2.1)$$

Balanço de Momento Linear para cada Constituinte

$$\rho_\alpha \dot{v}_\alpha = \operatorname{div} T_\alpha + m_\alpha + \rho_\alpha b_\alpha \ , \qquad (2.2)$$

Conservação de Momento Linear para a Mistura

$$3 \qquad (2.3)$$

$$\rho\,\dot{\varepsilon} + \operatorname{div} q = \operatorname{tr}(T \operatorname{grad} v) + \rho\gamma \ , \tag{2.4}$$

onde α indica o constituinte e assume os valores: 1 para o *fluido viscoso;* 2 para o *sólido deformável* e 3 para o *fluido não viscoso.* Para cada constituinte ρ_α é a sua densidade, v_α a velocidade, m_α o suprimento de momento linear, T_α o tensor tensão, b_α a força de campo externa e, para a mistura, ρ a densidade, v a velocidade, T o tensor tensão, q o fluxo de calor e γ o suprimento de energia interna. Se $f_\alpha = \hat{f}_\alpha(x,t)$ então:

$$\bar{f}_\alpha = \partial_t \hat{f}_\alpha + (\operatorname{grad} \hat{f}_\alpha) \cdot v_\alpha \ ,$$

$$\dot{f}_\alpha = \partial_t \hat{f}_\alpha + (\operatorname{grad} \hat{f}_\alpha) \cdot v \ .$$

Os termos constitutivos $C = \{T_\alpha, m_\alpha, q, \varepsilon\}$, dependem do tipo da mistura a ser analisada. Para o caso de uma mistura não simples constituída de fluido viscoso, sólido deformável e fluido não viscoso, supomos que os mesmos dependem das seguintes variáveis:

$$C = F(\rho_1, \rho_3, \Theta, v_1, v_2, v_3, \operatorname{grad}\Theta, \operatorname{grad}\rho_1,$$
$$\operatorname{grad}\rho_3, B_2, \operatorname{grad} B_2, D_1) \ ,$$

onde Θ é a temperatura, B_2 o tensor de Cauchy-Green à esquerda no sólido e $D_1 = [\operatorname{grad} v_1 + (\operatorname{grad} v_1)^T]/2$.

Com base nestas hipóteses constitutivas e nas restrições impostas pela desigualdade de Clausius-Duhem, podemos escrever as seguintes equações linearizadas e desigualdades:

$$T_1 = [\alpha_0 + \alpha_1(\rho_1-\rho_{1R}) + \alpha_2(\rho_2-\rho_{2R}) + \alpha_3(\rho_3-\rho_{3R})$$
$$+ \alpha_4(\Theta-\Theta_R) + \lambda_1 \operatorname{tr} D_1]\, 1 + 2\mu_1 D_1 \ , \tag{2.5}$$

$$T_2 = [\beta_0 + \beta_1(\rho_1-\rho_{1R}) + \beta_2(\rho_2-\rho_{2R}) + \beta_3(\rho_3-\rho_{3R})$$
$$+ \beta_4(\Theta-\Theta_R)]\, 1 + 2\mu_2 E_2 \ , \tag{2.6}$$

$$T_3 = [\gamma_0 + \gamma_1(\rho_1-\rho_{1R}) + \gamma_2(\rho_2-\rho_{2R}) + \gamma_3(\rho_3-\rho_{3R})$$

$$+ \gamma_4(\Theta-\Theta_R)] \, 1 \,, \tag{2.7}$$

$$m_\beta = \sum_{\alpha=1}^{3} \sigma_{\beta\alpha} \operatorname{grad} \rho_\alpha - \sum_{a=1}^{3} \xi_{\beta\alpha} v_\alpha - \nu_\beta \operatorname{grad} \Theta \,, \tag{2.8}$$

$$\sum_{\beta=1}^{3} \sigma_{\beta\alpha} = \sum_{\beta=1}^{3} \xi_{\beta\alpha} = \sum_{\beta=1}^{3} \nu_\beta = 0 \,, \tag{2.9}$$

$$q = -\kappa \operatorname{grad} \Theta - \kappa_1 v_1 - \kappa_2 v_1 - \kappa_3 v_3 \,, \tag{2.10}$$

$$\xi_{\alpha\alpha} \geqslant 0 \,, \quad \varepsilon_{11} \, \xi_{33} - \xi_{13} \, \xi_{31} \geqslant 0 \,, \tag{2.11}$$

$$\kappa \geqslant 0 \,, \quad \mu_1 \geqslant 0 \,, \tag{2.12}$$

onde $\rho_{\alpha R}$ e Θ_R são, respectivamente, a densidade do constituinte a num estado de referência e a temperatura no mesmo estado. Se w_2 é o *deslocamento* do sólido definido por:

$$w_2 = w_2(X_2,t) = \chi_2(X_2,t) - X_2 \,, \tag{2.13}$$

E_2 é definido como a parte simétrica do gradiente do deslocamento, isto e

$$E_2 = [\operatorname{Grad} w_2 + (\operatorname{Grad} w_2)^T]/2 \,. \tag{2.14}$$

As equações (2.5) a (2.12), podem ser obtidas através do trabalho de Bowen[3], se tomarmos o cuidado de combinar os tipos de misturas ali apresentados, uma vez que este caso não é por ele explicitamente tratado. Por outro lado, mesmo não sendo difícil chegar a estes resultados a partir da desigualdade de Clausius-Duhem, não os desenvolveremos aqui por serem os cálculos muito extensos. Deve-se observar ainda que a forma linearizada do fluxo de calor apresentada acima já inclui a parte linear que não é interna.

3. CONVECÇÃO NATURAL ENTRE DOIS PLANOS PARALELOS

O primeiro caso a ser analisado consiste no escoamento da mistura em estado estacionário, entre dois planos paralelos mantidos a temperaturas diferentes. Os dois planos são considerados rígidos, impermeáveis, suficientemente longos e estão localizados em $y = \pm L$. A Única força de campo externa é a da gravidade, que age segundo $-z$. Se (e_x, e_y, e_z) são os vetores unitários correspondentes a (x, y, z), então adotamos as seguintes soluções para as equações de balanço:

$$
\begin{aligned}
v_1 &= v_z^1(y)\, e_z, & v_x^1 &= v_y^1 = 0 \,, \\
w_2 &= w_z^2(y)\, e_z, & w_x^2 &= w_y^2 = 0 \,, \\
v_3 &= v_z^3(y)\, e_z, & v_x^3 &= v_y^3 = 0 \,, \\
\Theta &= \Theta(y) \,, & \rho_\alpha &= \rho_\alpha(y, z)
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

com as condições de contorno:

$$
\begin{aligned}
& v_z^1(L) = w_z^2(L) = v_z^3(L) = 0 \,. \\
& v_z^1(-L) = w_z^2(-L) = v_z^3(-L) = 0 \,, \\
& \Theta(-L) = \Theta_1 \,, \quad \Theta(L) = \theta_2 \,.
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

As soluções (3.1) verificam as equações de balanço de massa de cada constituinte (2.1), se notarmos que podemos escrevê-las como:

$$\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \text{grad}\, \rho_\alpha \cdot v_\alpha + \rho_\alpha \,\text{div}\, v_\alpha = 0 \,.$$

Enquanto o primeiro termo da equação acima é nulo por estarmos considerando estados estacionários o segundo também o é, por ser um termo não linear. Conseqüentemente as equações de balanço de massa de cada constituinte podem ser escritas como:

$$\text{div}\, v_\alpha = 0 \,,$$

verificando-se facilmente a observação acima. Por outro lado, segundo a mesma aproximação, escrevemos para a mistura:

$$\operatorname{div} v = 0 \; .$$

Com base na equação (2.10), a equação de balanço de energia para a mistura (2.4), na forma linearizada, em estado estacionário e seu suprimento de energia interna, reduz-se a (*):

$$- \kappa \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} = 0 \; . \tag{3.3}$$

A solução de (3.3) com as condições de contorno é:

$$\Theta = \Theta_m + \Delta_y \; , \tag{3.4}$$

onde: $\Theta_m = \dfrac{\Theta_1 + \Theta_2}{2}$ e $\Delta = \dfrac{\Theta_2 - \Theta_1}{2L}$.

Como estamos interessados em misturas linearizadas em estado estacionário, então:

$$v_2 = \bar{w}_2 = 0 \; . \tag{3.5}$$

Segundo as equações (2.2), (2.5), (2.6), (2.7), (2.8), (3.1) e (3.5), podemos escrever as seguintes equações de balanço de momento linear para cada constituinte em estado estacionário:

$$\sum_{\delta=1}^{3} (\alpha_\delta + \sigma_{1\delta}) \left(\frac{\partial \rho_\delta}{\partial y} e_y + \frac{\partial \rho_\delta}{\partial z} e_z\right) + (\alpha_4 - \nu_1) \frac{\partial \Theta}{\partial y} e_y + \mu_1 \frac{\partial^2 v_z^1}{\partial y^2} e_z -$$

$$\xi_{11} v_z^1 e_z - \xi_{13} v_z^3 e_z - \rho_1 g e_z = 0 \; ,$$

$$\sum_{\delta=1}^{3} (\beta_\delta + \sigma_{2\delta}) \left(\frac{\partial \rho_\delta}{\partial y} e_y + \frac{\partial \rho_\delta}{\partial z} e_z\right) + (\beta_4 - \nu_2) \frac{\partial \Theta}{\partial y} e_y + \mu_2 \frac{\partial^2 w_z^2}{\partial y^2} e_z -$$

$$- \xi_{21} v_z^1 e_z - \xi_{23} v_z^3 e_z - \rho_2 g e_z = 0 \; , \quad (**) \tag{3.6}$$

(*) O único termo linear de $\operatorname{tr}(T \operatorname{grad} v)$ é nulo.

(**) Na teoria linearizada podemos identificar Grad w_2 com grad w_2. Vide Bowen[3] pág. 100.

$$\sum_{\delta=1}^{3} (\gamma_\delta + \sigma_{3\delta}) \left(\frac{\partial \rho_\delta}{\partial y} e_y + \frac{\partial \rho_\delta}{\partial z} e_z\right) + (\gamma_4 - \nu_3) \frac{\partial \Theta}{\partial y} e_y -$$

$$- \xi_{31} v_z^1 e_z - \xi_{33} v_z^3 e_z - \rho_3 g e_z = 0 ,$$

onde g é a aceleração da gravidade.

Segundo o eixo y as equações *(3.6)* tomam a forma:

$$\begin{aligned} &\sum_{\delta=1}^{3} (\alpha_\delta + \sigma_{1\delta}) \frac{\partial \rho_\delta}{\partial y} + (\alpha_4 - \nu_1) \frac{\partial \Theta}{\partial y} = 0 , \\ &\sum_{\delta=1}^{3} (\beta_\delta + \sigma_{2\delta}) \frac{\partial \rho_\delta}{\partial y} + (\beta_4 - \nu_2) \frac{\partial \Theta}{\partial y} = 0 \\ &\sum_{\delta=1}^{3} (\gamma_\delta + \sigma_{3\delta}) \frac{\partial \rho_\delta}{\partial y} + (\gamma_4 - \nu_3) \frac{\partial \Theta}{\partial y} = 0 . \end{aligned} \tag{3.7}$$

O sistema de equações diferenciais (3.7) pode ser facilmente resolvido obtendo-se:

$$\rho_\alpha = \Gamma_\alpha \Theta + f_\alpha(z) . \tag{3.8}$$

onde $f_\alpha(z)$ é uma função que depende somente de z e:

$$\Gamma_1 = \frac{1}{\Lambda} \begin{vmatrix} \nu_1 - \alpha_4 & \alpha_2 + \sigma_{12} & \alpha_3 + \sigma_{13} \\ \nu_2 - \beta_4 & \beta_2 + \sigma_{22} & \beta_3 + \sigma_{23} \\ \nu_3 - \gamma_4 & \gamma_2 + \sigma_{32} & \gamma_3 + \sigma_{33} \end{vmatrix} ,$$

$$\Gamma_2 = \frac{1}{\Lambda} \begin{vmatrix} \alpha_1 + \sigma_{11} & \nu_1 - \alpha_4 & \alpha_3 + \sigma_{13} \\ \beta_1 + \sigma_{21} & \nu_2 - \beta_4 & \beta_3 + \sigma_{23} \\ \gamma_1 + \sigma_{31} & \nu_3 - \gamma_4 & \gamma_3 + \sigma_{33} \end{vmatrix} , \tag{3.9}$$

$$\Gamma_3 = \frac{1}{\Lambda} \begin{vmatrix} \alpha_1 + \sigma_{11} & \alpha_2 + \sigma_{12} & \nu_1 - \alpha_4 \\ \beta_1 + \sigma_{21} & \beta_2 + \sigma_{22} & \nu_2 - \beta_4 \\ \gamma_1 + \sigma_{31} & \gamma_2 + \sigma_{32} & \nu_3 - \gamma_4 \end{vmatrix} ,$$

$$\Lambda = \begin{vmatrix} \alpha_1 + \sigma_{11} & \alpha_2 + \sigma_{12} & \alpha_3 + \sigma_{13} \\ \beta_1 + \sigma_{21} & \beta_2 + \sigma_{22} & \beta_3 + \sigma_{23} \\ \gamma_1 + \sigma_{31} & \gamma_2 + \sigma_{32} & \gamma_3 + \sigma_{33} \end{vmatrix}$$

Se substituirmos os valores de $\rho\alpha'$ dados pela equação (3.8), na equações (3.6) (segundo o eixo z) verifica-se que cada uma das três equações pode ser separável, pois uma parte é uma função somente de y enquanto a outra somente de z. Consequentemente, existem três constantes c_1, c_2 e c_3 tais que:

$$- \sum_{\delta=1}^{3} (\alpha_\delta + \sigma_{1\delta}) \frac{\partial f_\delta}{\partial z} + f_1 g = c_1 = \mu_1 \frac{\partial^2 v_z^1}{\partial y^2} - \xi_{11} v_z^1 -$$

$$- \xi_{13} v_z^3 - g \Gamma_1 \Theta ,$$

$$- \sum_{\delta=1}^{3} (\beta_\delta + \sigma_{2\delta}) \frac{\partial f_\delta}{\partial z} + f_2 g = c_2 = \mu_2 \frac{\partial^2 w_z^2}{\partial y^2} - \xi_{21} v_z^1 -$$

$$- \xi_{23} v_z^3 - g \Gamma_2 \Theta , \qquad (3.10)$$

$$- \sum_{\delta=1}^{3} (\gamma_\delta + \sigma_{3\delta}) \frac{\partial f_\delta}{\partial z} + f_3 g = c_3 = -\xi_{31} v_z^1 - \xi_{33} v_z^3 - g \Gamma_3 \Theta$$

Para resolver o sistema de equações diferenciais formado pelo lado direito das equações (3.10) escrevemos, a partir da equação $(3.10)_3$:

$$- v_z^3 = \frac{c_3 + \xi_{31} v_z^1 + g \Gamma_3 \Theta}{\xi_{33}} \qquad (3.11)$$

Se substituirmos a equação (3.11) em $(3.10)_1$, obtemos a seguinte equação diferencial

$$\frac{\partial^2 v_z^1}{\partial y^2} - \tau^2 v_z^1 = \Omega + \psi y , \qquad (3.12)$$

onde:

$$\tau^2 = \frac{\xi_{11}\,\xi_{33} - \xi_{13}\,\xi_{31}}{\mu_1 \xi_{33}}\,, \tag{3.13}$$

$$\Omega = \frac{1}{\mu_1}\left\{c_1 + g\Gamma_1\Theta_m - \frac{\xi_{13}}{\xi_{33}}\,(c_3 + g\,\Gamma_3\Theta_m)\right\}, \tag{3.14}$$

$$\psi = \frac{1}{\mu_1}\left\{\Gamma_1 - \frac{\xi_{13}}{\xi_{33}}\,\Gamma_3\right\}\Delta\, g\,. \tag{3.15}$$

Verifica-se através das desigualdades (2.11) e (2.12) que $\tau^2 \geqslant 0$. Portanto, a solução da equação diferencial (3.12) com as condições de contorno dadas por (3.2) é:

$$v_z^1 = \frac{1}{\tau^2}\left\{\Omega\,\frac{\cosh \tau\, y}{\cosh \tau\, L} + \psi L\,\frac{\operatorname{senh} \tau\, y}{\operatorname{senh} \tau\, L}\right\} - \frac{1}{\tau^2}\,(\Omega + \psi y)\,. \tag{3.16}$$

Para a determinação de v_z^3, basta substituir a equação (3.16) na equação (3.11). A partir das equações $(3.10)_2$, (3.11) e (3.16) chegamos a:

$$\frac{\partial^2 w_z^2}{\partial y^2} = -\frac{\mu_1}{\mu_2}\left\{\Omega\,\frac{\cosh \tau\, y}{\cosh \tau\, L} + \psi L\,\frac{\operatorname{senh} \tau\, y}{\operatorname{senh} r\, L}\right\} + \Omega^* + \psi^*\, y\,, \tag{3.17}$$

onde

$$\Omega^* = \frac{\Omega\mu_1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_2}\,(c_2 + g\,\Gamma_2\,\Theta_m) - \frac{\xi_{23}}{\mu_2\,\xi_{33}}\,(c_3 + g\Gamma_3\Theta_m)\,, \tag{3.18}$$

$$\psi^* = \frac{\psi\mu_1}{\mu_2} + \frac{\Gamma_2 g\Delta}{\mu_2} - \frac{\xi_{23}}{\mu_2\,\xi_{33}}\,\Gamma_3\, g\,\Delta. \tag{3.19}$$

A solução da equação diferencial (3.17) com as condições de contorno (3.2) é:

$$w_z^2 = -\frac{\mu_1}{\mu_2}\,v_z^1 + \frac{\psi^*}{6}\,(y^3 - L^2\,y) + \frac{\Omega^*}{2}\,(y^2 - L^2)\,. \tag{3.20}$$

O lado esquerdo das equações (3.10) forma um sistema de equações diferenciais, cuja solução conduz a equações diferenciais de quarta ordem com coeficientes constantes porém de domínios difíceis de identificar. Portanto, os campos de densidade de cada constituinte ficam determinados pelas equações (3.8) sendo que as funções $f_\alpha(z)$ devem verificar o lado esquerdo das equações (3.10). Os campos de temperatura, de velocidade de cada fluido e de deslocamento do sólido ficam completamente determinados pelas equações (3.4), (3.11), (3.16) e (3.20)

Os casos particulares de misturas binárias decorrem das equações acima. Observamos apenas que, para uma mistura binária de um fluido viscoso e um sólido deformável não sujeitos à força de campo externa (g=0) e isotérmica, as equações (3.16) e (3.20) reduzem-se respectivamente a:

$$v_z^1 = \frac{\mu_1}{\xi_{11}} \left(\frac{\cosh \tau^* y}{\cosh \tau^* L} - 1 \right) , \tag{3.21}$$

$$w_z^2 = - \frac{\mu_1}{\mu_2} v_z^1 + \frac{(c_1 + c_2)}{2\mu_2} (y^2 - L^2) , \tag{3.22}$$

onde:

$$\tau^* = (\xi_{11}/\mu_1)^{1/2} . \tag{3.23}$$

As equações (3.21) e (3.22) são as mesmas que as de Crochet e Naghdi[4].

4. CONVECÇÃO NATURAL ENTRE CILINDROS CONCÊNTRICOS

Analisaremos a seguir o escoamento da mistura em estado estacionário entre dois cilindros concêntricos mantidos a temperaturas diferentes. Os cilindros são rígidos, impermeáveis, suficientemente longos e com raios r_1 e r_2 ($r_1 < r_2$). O seu eixo é orientado paralelamente ao campo gravitacional. As coordenadas cilindricas (r, Θ, z) correspondem aos vetores unitários (e_r, e_Θ, e_z). Para as equações de balanço adotamos as seguintes soluções:

$$v_1 = v_z^1 (r)\, e_z , \qquad v_r^1 = v_\Theta^1 = 0 ,$$

$$w_2 = w_z^2\ (r)\ e_z\ , \qquad w_r^2 = w_\Theta^2 = 0\ , \tag{4.1}$$

$$v_z = v_z^3\ (r)\ e_z\ , \qquad v_r^3 = v_\Theta^3 = 0\ ,$$

$$\Theta = \Theta(r) \qquad \rho_\alpha = \rho_\alpha(r,z)\ ,$$

com as condições de contorno:

$$v_z^1(r_1) = w_z^2(r_1) = v_z^3(r_1) = 0\ ,$$

$$v_z^1(r_2) = w_z^2(r_2) = v_z^3(r_2) = 0\ , \tag{4.2}$$

$$\Theta(r_1) = O,, \qquad \Theta(r_2) = \Theta_2\ .$$

Seguindo o mesmo raciocínio desenvolvido no item *3*, constata-se que as soluções (4.1) verificam as equações de balanço de massa de cada constituinte.

A equação de balanço de energia para a mistura *(2.4)* correspondente à equação (3.3) é:

$$-\frac{\kappa}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial\Theta}{\partial r}\right) = 0, \tag{4.3}$$

cuja solução para as condições de contorno *(4.2)* é:

$$\Theta = \Delta^*\ \ell n\ r + \Theta_m^*\ , \tag{4.4}$$

onde:

$$A^* = \frac{O,\ -\ O,}{\ell n\ r_2/r_1} \quad \text{e} \quad \Theta_m^* = \frac{O,\ \text{Rn}\ r,\ -\ O,\ \text{Rn}\ r,}{\ell n\ r_2/r_1}$$

As equações de balanço de momento linear para cada constituinte tem a mesma forma das equações (3.6) :

$$\sum_{\delta=1}^{3} (\alpha_\delta + \sigma_{1\delta}) \left(\frac{\partial\rho_\delta}{\partial r} e_r + \frac{\partial\rho_\delta}{\partial z} e_z\right) + (\alpha_4 - \nu_1) \frac{\partial\Theta}{\partial r} e_r + \frac{\mu_1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z^1}{\partial r}\right) e_z -$$

$$- \xi_{11} v_z^1 e_z - \xi_{13} v_z^3 e_z - \rho_1 g e_z = 0 ,$$

$$\sum_{\delta=1}^{3} (\beta_\delta + \sigma_{2\delta}) \left(\frac{\partial\rho_\delta}{\partial r} e_r + \frac{\partial\rho_\delta}{\partial z} e_z\right) + (\beta_4 - \nu_2) \frac{\partial\Theta}{\partial r} e_r + \frac{\mu_2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w_z^2}{\partial r}\right) e_z -$$

$$- \xi_{21} v_z^1 e_z - \xi_{23} v_z^3 e_z - \rho_2 g e_z = 0 ,$$

$$\sum_{\delta=1}^{3} (\gamma_\delta + \sigma_{3\delta}) \left(\frac{\partial\rho_\delta}{\partial r} e_r + \frac{\partial\rho_\delta}{\partial z} e_z\right) + (\gamma_4 - \nu_3) \frac{\partial\Theta}{\partial r} e_r - \xi_{31} v_z^1 -$$

$$- \xi_{33} v_z^3 - \rho_3 g e_z = 0 . \tag{4.5}$$

Segundo o eixo r o sistema de equações diferenciais pode ser resolvido obtendo-se:

$$\rho_\alpha = \Gamma_\alpha \Theta + f_\alpha(z) , \tag{4.6}$$

onde os coeficientes Γ_α são dados pelas equações (3.9).

Segundo o eixo z existem três constantes c_1^*, c_2^* e c_3^*, tais que:

$$- \sum_{\delta=1}^{3} (\alpha_\delta + \sigma_{1\delta}) \frac{\partial f_\delta}{\partial z} + f_1 g = c_1^* = \frac{\mu_1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z^1}{\partial r}\right) - \xi_{11} v_z^1 -$$

$$- \xi_{13} v_z^3 - g \Gamma_1 \Theta ,$$

$$- \sum_{\delta=1}^{3} (\beta_\delta + \sigma_{2\delta}) \frac{\partial f_\delta}{\partial z} + f_2 g = c_2^* = \frac{\mu_2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w_z^2}{\partial r}\right) - \xi_{21} v_z^1 -$$

$$- \xi_{23} v_z^3 - g \Gamma_2 \Theta ,$$

$$- \sum_{\delta=1}^{3} (\gamma_\delta + \sigma_{3\delta}) \frac{\partial f_\delta}{\partial z} + f_3\, g = c_3^* = - \xi_{31}\, v_z^1 - \xi_{33}\, v_z^3 - g\, \Gamma_3\, \Theta \, . \tag{4.7}$$

A resolução do sistema de equações diferenciais formado pelo lado direito das equações (4.7) é idêntica à do item 3, pois da equação $(4.7)_3$ podemos escrever:

$$- v_z^3 = \frac{c_3^* + \xi_{31}\, v_z^1 + \Gamma_3\, \Theta\, g}{\xi_{33}} \tag{4.8}$$

A substituição da equação (4.8) na $(4.7)_1$ nos leva a:

$$\frac{\partial^2 v_z^1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z^1}{\partial r} - \tau^2\, v_z^1 = \bar{\Omega} + \bar{\psi}\, \ell n\, r \tag{4.9}$$

onde os coeficientes $\bar{\Omega}$ e $\bar{\psi}$ têm a mesma forma dos coeficientes Ω e ψ, definidos pelas equações (3.14) e (3.15), bastando trocar c_α por c_α^*, Θ_m por Θ_m^* e A por A*.

A solução da equação diferencial (4.9) com as condições de contorno (4.2) é:

$$v_z^1 = \delta_1\, I_0(\tau r) + \delta_2\, K_0(\tau r) - \frac{1}{\tau^2} (\bar{\Omega} + \bar{\psi}\, \ell n\, r) \, , \tag{4.10}$$

onde $I_0(\tau r)$ e $K_0(\tau r)$ são, respectivamente, as funções modificadas de Bessel de primeira e segunda espécie e de ordem zero, e:

$$\delta_1 = \frac{K_0(\tau r_2)(\bar{\Omega} + \bar{\psi}\, \ell n\, r_1) - K_0(\tau r_1)(\bar{\Omega} + \bar{\psi}\, \ell n\, r_2)}{\tau^2 (I_0(\tau r_1) K_0(\tau r_2) - I_0(\tau r_2) K_0(\tau r_1))} \, , \tag{4.11}$$

$$\delta_2 = \frac{I_0(\tau r_1)(\bar{\Omega} + \bar{\psi}\, \ell n\, r_2) - I_0(\tau r_2)(\bar{\Omega} + \bar{\psi}\, \ell n\, r_1)}{\tau^2 (I_0(\tau r_1) K_0(\tau r_2) - I_0(\tau r_2) K_0(\tau r_1))} \, , \tag{4.12}$$

A seguinte equação diferencial é obtida através do lado direito da equação $(4.7)_2$ juntamente com as equações (4.8) e (4.10):

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w_z^2}{\partial r}\right) = -c^2\frac{\mu_1}{\mu_2}\left(\delta_1 I_0(\tau r) + \delta_2 K_0(\tau r)\right) +$$

$$+ \bar{\Omega}^* + \bar{\psi}^* \ln r, \tag{4.13}$$

onde os coeficientes $\bar{\Omega}^*$ e $\bar{\psi}^*$ têm a mesma forma que R^* e ψ^*, definidos pelas equações (3.18) e (3.19), bastando trocar R por $\bar{\Omega}$, c_α por e^*_α, Θ_m por Θ^*_m, ψ por $\bar{\psi}$ e A por A^*.

A solução da equação diferencial (4.13) com as condições de contorno (4.2) é:

$$w_z^2 = -\frac{\mu_1}{\mu_2} v_z^1 + \bar{\Omega}^* \frac{r^2}{4} + \frac{\bar{\psi}^*}{4}(r^2 \ln r - r^2) +$$

$$+ \frac{\ln r}{\ln r_2/r_1}\left\{\frac{\bar{\Omega}^*}{4}(r_1^2 - r_2^2) + \frac{\bar{\psi}^*}{4}(r_1^2 \ln r_1 - r_1^2 -\right.$$

$$\left. - r_2^2 \ln r_2 + r_2^2)\right\} + \frac{1}{\ln r_2/r_1}\left\{\frac{\bar{\psi}^*}{4}(r_2^2 \ln r_1 -\right.$$

$$- r_1^2 \ln r_2) + \frac{\bar{\psi}^*}{4}\left[r_2^2 \ln r_1(\ln r_2 - 1) -\right.$$

$$\left.\left. - r_1^2 \ln r_2 (\ln r_1 - 1)\right]\right\} . \tag{4.14}$$

Portanto, as equações (4.4), (4.6), (4.8), (4.10) e (4.14), determinam os campos de temperatura, de densidade, de velocidade de cada fluido e de deslocamento do sólido.

Podemos também analisar o caso de escoamento isotérmico, sem ação de força de campo externa, de uma mistura binária constituída de um fluido viscoso e um sólido deformável. Se supusermos que a mistura escoa no interior de um cilindro de raio R e considerarmos que a velocidade é finita quando $r=0$, podemos verificar então, a partir das equação acima, que:

$$v_z^1 = \frac{c_1^*}{\xi_{11}}\left[\frac{I_0(\tau^* r)}{I_0(\tau^* R)} - 1\right], \tag{4.15}$$

$$w_z^2 = -\frac{\mu_1}{\mu_2} v_z^1 + \frac{c_1^* + c_2^*}{4\mu_2}(r^2 - R^2) \qquad (4.16)$$

As equações (4.15) e (4.16) têm a mesma forma que as de Atkin e Craine[5].

REFERÊNCIAS

1. Bird, R.B., W.E. Stewart e E.N.Lightfoot; *Transport Phenomena*, John Wiley & Sons, New York, 1960.
2. Slattery, J.C.; *Momentum, Energy and Mass Transfer in Continua*, McGraw-Hill, Tokyo, 1972.
3. Bowen, R.M. ; "Theory of Mixtures", em *Continuum Physics*, vol.III (ed. A.C.Eringen), Academic Press, New York, 1976.
4. Crochet,M.J. e P.M.Naghdi; Int.J.Engn.Sci., 4, 383-401 (1966).
5. Atkin,R.J. e R.E.Craine; J.Inst.Maths.Applics., 17, 153-207 (1976).