Revista Brasileira de Física, Vol. 11, nº 3, 1981

Propagação de Ondas de Aceleração em Misturas Transversalmente Isotrópicas*

GILBERTO MEDEIROS KREMER

Departamento de Física, Universidade Federal do Paraná, Caixa Postal 1862, Curitiba, PR

I-SHIH LIU

Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Caixa Postal 1835, Rio de Janeiro, RJ

Recebido em 3 de Fevereiro de 1981

The propagation of a homothermal acceleration wave for a transversely isotropic binary mixture of an elastic solid and a non-viscous fluid is analysed. The velocities of propagation of the acceleration waves, for the case of an isotropic mixture is recovered, by making assumption that the mixture has no preferred axis of transversal isotropy.

Estuda-se a propagação de ondas de aceleração homotérmicas em misturas binárias transversalmente isotrópicas, constituídas de um sólido deformável e um fluido não viscoso. As velocidades de propagação das ondas de aceleração, para o caso de misturas isotrópicas são retomadas, ao supormos que não existe mais um eixo preferencial de isotropia transversal.

1. INTRODUÇÃO

Bowen[1] fez um estudo sobre a Teoria de Misturas e, através da teoria das superfícies singulares[2], analisou a propagação de ondas de

* Auxílios: FINEP e CEPG/UFRJ (I-S.L.)

aceleração em misturas binárias isotrópicas de um sólido deformável e um fluido não viscoso.

O objetivo deste trabalho é estudar a propagação de ondas de aceleração homotérmicas em misturas não simples transversalmente isotrópicas com os mesmos constituintes considerados na ref.1.

A justificativa da análise deste tipo de mistura fundamenta-se na observação de Biot[3], de que esta simetria é usualmente encontrada em formações rochosas naturais e solos.

Verifica-se que as velocidades de propagação das ondas de aceleração& ref.l são retomadas quando supomos que não existe mais eixo de isotropia transversal.

Notação: 1 é o tensor unitãrio e A^T o transposto de A. O produto tensorial de dois vetores é o tensor definido por: $(a \otimes b)\, c = a\, (b \cdot c)$, para todo vetor c. Denotaremos por $\mathrm{sim}(a \otimes b) = (a \otimes b + b \otimes a)/2$ e ants $(a \otimes b) = (a \otimes b - a \otimes b)/2$.

2. EQUAÇÕES DE BALANÇO

As leis básicas para cada constituinte de uma mistura sem reação química são dadas, segundo Bowen[1], através de

Balanço de Massa

$$\dot{\rho}_\alpha + \rho_\alpha \operatorname{div} v_\alpha = 0 , \tag{2.1}$$

Balanço de Momento Linear

$$\rho_\alpha \dot{v}_\alpha = \operatorname{div} T_\alpha + m_\alpha + \rho_\alpha f_\alpha , \tag{2.2}$$

***Balanço de** Momento Angular*

$$M_\alpha = T_\alpha - T_\alpha^T , \tag{2.3}$$

Balanço de. Energia

$$\rho_\alpha \dot{\varepsilon}_a + \operatorname{div} h, = \operatorname{tr}(T_\alpha^T \operatorname{grad} v_\alpha) + \phi_\alpha + \rho_\alpha \gamma_\alpha , \tag{2.4}$$

$$\sum_{a=1}^{2} (\rho_a \dot{\eta}_a + \operatorname{div} (h_\alpha/\theta) - (\rho_\alpha \gamma_\alpha)/\theta) \geq 0 , \tag{2.5}$$

onde o índice a representa o constituinte e assume os valores 1 para o constituinte fluido e 2 para o sólido. Para cada constituinte ρ_a é a sua densidade; v_a a velocidade; T_a o tensor tensão; m_a o suprimento de momento linear; f_α a força de campo externo; M_a o suprimento de momento angular; ε_a a energia interna: h_a o fluxo de calor; ϕ_a o suprimento de energia; γ_a o suprimento de calor e η_a a entropia. Se $f_\alpha = \hat{f}(x,t)$ é uma função diferenciável, a derivada material de f_a, seguindo o constituinte α, é dada por:

$$\dot{f}_\alpha = \partial_t \hat{f}_\alpha + (\operatorname{grad} \hat{f}_\alpha)\, v_\alpha . \tag{2.6}$$

Supomos que os constituintes fluido e sólido estão a uma mesma temperatura θ.

Representamos, respectivamente, a conservação de momento linear, momento angular e energia total de mistura, através de:

$$\sum_{\alpha=1}^{2} m_\alpha = 0 , \quad \sum_{\alpha=1}^{2} \hat{M}_\alpha = 0 ,$$

$$\sum_{\alpha=1}^{2} (\phi_\alpha + m_\alpha . u_\alpha) = 0 , \tag{2.7}$$

onde u_α, denominada de velocidade de difusão, é definida por:

$$u_\alpha = v_\alpha - v ,$$

$$v = \sum_{\alpha=1}^{2} (\rho_\alpha/\rho)\, v_a = \text{velocidade da mistura,}$$

$$\rho = \sum_{a=1}^{2} \rho_\alpha = \text{densidade da mistura.}$$

3. EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS

A análise de uma mistura não simples de um fluido não viscoso com um sólido deformável baseia-se na hipótese de que os termos constitutivos:

$$\{m_\alpha, T_\alpha, \varepsilon_\alpha, h_\alpha, \phi_\alpha, \eta_\alpha\},$$

são funções de:

$$\{\rho_1, \theta, g, a, b, F, \mathbb{F}\}$$

onde F é o gradiente de deformação do sólido; $g = \text{grad}\,\theta$; $a = v_1 - v_2$; $b = \text{grad}\,\rho_1$; $\mathbb{F} = \text{grad}\,F$.

A desigualdade entrópica (2.5) nos fornece, com base nas hipóteses acima, restrições aos termos constitutivos. A seguir, transcrevemos apenas as que são mais importantes ao nosso estudo*:

$$\psi_I = \hat{\psi}_I(\rho_1, \theta, F),$$

$$\psi_\alpha^0 = \hat{\psi}_\alpha(\rho_1, \theta, F) = (\psi_\alpha)_{a=0}, \quad \alpha = 1;2,$$

$$T_1 = -\Pi_1 1 + \rho_1(\partial_a \psi_1) \otimes a,$$

$$T_2 = (\rho_1(\partial_F \psi_1) + \rho_2(\partial_F \psi_2)) F^T + \rho_2(\partial_a \psi_2) \otimes a,$$

$$h^0 = 0,$$

$$m^0 = \frac{\Pi_1^0}{\rho_1} \text{grad}\,\rho_1 - \rho_1 (\text{grad}\,\psi_1^0)^0 . \qquad (3.1)$$

onde o índice ^{0} representa o valor da função no equilíbrio, isto é, quando $g = a = 0$, e:

$$\psi_a = \varepsilon_a - \theta\,\eta_\alpha = \text{energia livre do constituinte } a,$$

$$\psi_I = \sum_{a=1}^{2} (\rho_\alpha/\rho)\,\psi_\alpha = \text{energia livre da mistura},$$

* As equações estão escritas na forma da ref.4.

$$m = m_1 = -m_2 \; ; \; h = h_1 + h_2 \; ,$$

$$\Pi_1 = \rho_1(\mu_1 - \psi_1) \; ; \; \mu_1 = \partial_{\rho_1}(\rho\, \psi_I) \; .$$

4. EQUAÇÕES LINEARIZADAS

Com base na teoria linear, determina-se, a seguir, os tensores de tensão de cada componente.

Podemos escrever:

$$F = 1 + H \; , \tag{4.1}$$

onde, segundo Truesdell et *al.*[5] H é o *gradiente de deslocamento* e:

$$\hat{E} = (H + H^T)/2 \; , \; \hat{R} = (H - H^T)/2 \; , \tag{4.2}$$

são respectivamente, o *tensor deformação infinitesimal e o tensor de rotação infinitesimal.*

Supomos, a partir deste ponto, que as quantidades $|g|$; $|a|$ ·; b ; H $|\mathbb{F}|$ são de ordem ε, a qual é suficientemente pequena.

Estamos interessados em estudar uma mistura transversalmente isotrópica, onde o grupo de simetria G é definido por:

$$G = \{Q \in O \; ; \; Qp = \pm p\} \; ,$$

isto é, são tipos de materiais simétricos em relação a rotações em torno de um eixo, caracterizado por um vetor unitário **p**, e também a inversão de eixo.

É fácil verificar, através das equações $(3.1)_4$ e (4.1), que a determinação dos tensores de tensão para uma teoria linearizada baseia-se na representação quadrática das energias livres de cada constituinte.

Por outro lado, a energia livre ψ_a é uma função de:

$$\psi_\alpha = \psi_\alpha(\rho_1, \theta, g, a, b, H, \mathbb{F}) ,$$

onde ψ_a é uma função transversalmente isotrópica (com relação ao grupo G). Segundo Liu[6], se definirmos:

$$\psi_\alpha = \bar{\psi}_\alpha(p, \rho_1, \theta, g, a, b, H, \mathbb{F}),$$

então $\bar{\psi}_a$ é uma função isotrópica e além disso $\bar{\psi}_a$ é uma função par em *p*. Com base em Liu[6] e nas restrições dadas pela equação $(3.1)_2$ obtemos:

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}_\alpha = {} & \psi^1_\alpha + \psi^2_\alpha(\mathrm{tr}\,\hat{E}) + \psi^3_\alpha(p.\hat{E}\,p) \\
& + \psi^4_\alpha(\mathrm{tr}\,\hat{E})^2 + \psi^5_\alpha(\mathrm{tr}\,\hat{E})(p.\hat{E}\,p) \\
& + \psi^6_\alpha(a.p)(a.p) + \psi^7_\alpha(\mathrm{tr}\,\hat{E}^2) \\
& + \psi^8_\alpha(p.\hat{E}\,p)\;(p.\hat{E}\,p) + \psi^9_\alpha(p.\hat{E}^2p) \\
& + \psi^{10}_\alpha(a.b) + \psi^{11}_\alpha(a.g) + \psi^{12}_\alpha(a.a) \\
& + \psi^{13}_\alpha(a.p)(g.p) + \psi^{14}_\alpha(a.p)(b.p) \\
& + \psi^{15}_\alpha(\mathrm{tr}\,\hat{R}^2) + \psi^{16}_\alpha(p.\hat{R}^2p) + \psi^{17}_\alpha(\hat{E}\,p.\hat{R}\,p) \\
& + \Gamma_\alpha(\mathbb{F}, a, p, \rho_1, \theta) + O(\varepsilon^3) ,
\end{aligned} \tag{4.3}$$

onde $\psi^1_\alpha, \ldots, \psi^{17}_\alpha (\alpha = 1;2)$ são funções escalares da ρ_1, 8; Γ_α é de ordem ε^2, linear em $\mathbb{F}$ e tal que $(\Gamma_\alpha)_{a=0} = 0$.

Segundo $(3.1)_1$, certos coeficientes $\psi^\delta_\alpha (\delta = 6;10;11;12;13;14)$ devem ainda satisfazer a:

$$\rho_1\,\psi^\delta_1 + \rho_2\,\psi^\delta_2 = 0 \tag{4.4}$$

A partir das equações (4.3) e (4.4) podemos escrever as equações $(3.1)_{3,4}$ como:

$$T_1 = -\Pi_1^0 \, 1$$

$$T_2 = \Pi_2 \, 1 + \beta_1 (p \otimes p) + \beta_2 \hat{E} + \beta_3 (p \otimes \hat{E} p)$$

$$+ \beta_4 (p \otimes \hat{R} p) + \beta_5 \hat{R} + \beta_6 (\hat{E} p \otimes p)$$

$$+ \beta_7 (\hat{R} p \otimes p) , \qquad (4.5)$$

onde:

$$\Pi_2 = (\rho_1\psi_1^2+\rho_2\psi_2^2) + 2(\rho_1\psi_1^4+\rho_2\psi_2^4)(\mathrm{tr}\ \hat{E})$$

$$+ (\rho_1\psi_1^5 + \rho_2\psi_2^5)(p.\hat{E} p) .$$

$$\beta_1 = (\rho_1\psi_1^3 + \rho_2\psi_2^3) + (\rho_1\psi_1^5 + \rho_2\psi_2^5)(\mathrm{tr}\ \hat{E})$$

$$+ 2(\rho_1\psi_1^8 + \rho_2\psi_2^8)(p.\hat{E} p) ,$$

$$\beta_2 = 2(\rho_1\psi_1^7 + \rho_2\psi_2^7) + (\rho_1\psi_1^2 + \rho_2\psi_2^2) ,$$

$$\beta_3 = (\rho_1\psi_1^9 + \rho_2\psi_2^9) + (\rho_1\psi_1^{17} + \rho_2\psi_2^{17}) / 2$$

$$+ (\rho_1\psi_1^3 + \rho_2\psi_2^3) ,$$

$$\beta_4 = (\rho_1\psi_1^{17} + \rho_2\psi_2^{17})/2 + (\rho_1\psi_1^{16} + \rho_2\psi_2^{16})$$

$$+ (\rho_1\psi_1^3 + \rho_2\psi_2^3) ,$$

$$\beta_5 = -2(\rho_1\psi_1^{15} + \rho_2\psi_2^{15}) - (\rho_1\psi_1^2 + \rho_2\psi_2^2) ,$$

$$\beta_6 = (\rho_1\psi_1^9 + \rho_2\psi_2^9) - (\rho_1\psi_1^{17} + \rho_2\psi_2^{17}) / 2,$$

$$\beta_7 = (\rho_1\psi_1^{17} + \rho_2\psi_2^{17})/2 - (\rho_1\psi_1^{16} + \rho_2\psi_2^{16}) .$$

Como, para os nossos propósitos, não nos interessam as formas l: arizadaç de m e h, não as iremos desenvolver. Escrevemos apenas:

$$m = m^0 + \ell , \qquad (4.6)$$

onde $R = \hat{\ell}(\rho_1, \theta, g, a, b, F, \mathbf{F})$ é tal que $\ell^0 = 0$, satisfazendo, assim, a equação $(3.1)_6$.

5. CONDIÇÕES DE PROPAGAÇAO

Os conceitos sobre superfícies singulares e ondas, empregadas nesta seção, podem ser encontradas no capítulo C de Truesdell et *al.*[2]

Se $[\psi] = \psi^- - \psi^+$, denotar o salto da quantidade ψ através de uma superficie orientãvel J com normal unitária n, dizemos que J é uma *onda fraca* em relação a ψ se $[\psi] = 0$, porém é singular aos saltos das derivadas de ψ.

Uma *onda de aceleração homotérmica* será definida através de:

$$[\rho_\alpha] = [v_\alpha] = [F] = [g] = [\theta] = 0 , \qquad (5.1)$$

sendo que as derivadas de ρ_α, v e F podem sofrer descontinuidades de salto através de $J^{(*)}$.

Para o caso em que $[\psi] = 0$, a condição de compatibilidade cinemática (**) nos fornece que:

$$[\dot{\psi}] = -\nu \, [\mathrm{grad}\, \psi]\, n , \qquad (5.2)$$

onde ν é a velocidade intrínseca da onda, normal à superfície.

Vamos supor que a onda se propaga em regiões onde $\overset{+}{v}_\alpha = 0$, $\rho_1 = \overset{+}{\rho}_1$, $\overset{+}{F} = 1$ e $\Theta = \overset{+}{\Theta}$, isto é, regiões que inicialmente estão em repouso, com o fluido na configuração de referência, o sólido na configuração não distorcida e a temperatura constante.

Nestas condições, se, tomarmos o salto da equação (2.6) obtemos:

(*) Para o nosso estudo não nos interessam os saltos das derivadas de Θ e g.

(**) Vide Ref. 2. § 180.

$$[\dot{f}_\alpha] = [\partial_t \hat{f}_\alpha]. \tag{5.3}$$

Se s_α denotar o vetor amplitude de aceleração associado ao constituinte a, isto é,

$$[\dot{v}_\alpha] = s_\alpha , \tag{5.4}$$

é fácil verificar através das equações (5.1), (5.2), (5.3), (5.4) e do salto da equação (2.1) que:

$$[\mathrm{grad}\ v_\alpha] = -(s_\alpha \otimes n)/\nu ,$$

$$[\dot{\rho}_\alpha] = \rho_\alpha^+ (s_\alpha \cdot n)/\nu,$$

$$[\mathrm{grad}\ \rho_\alpha] = -\rho_\alpha^+ (s_\alpha . n)\ n/\nu^2. \tag{5.5}$$

Com base na5 equações (5. l), (5.2) e $(5.5)_1$ e no seguinte resultado que pode ser obtido da definição de F_α:

$$\dot{F}_a = (\mathrm{grad}\ v_\alpha)\ F_\alpha ,$$

encontra-se que:

$$[\partial_t F] = -(s_2 \otimes n)/\nu ,$$

$$[\mathrm{grad}\ F] = (s_2 \otimes n \otimes n)/\ \nu^2 . \tag{5.6}$$

6. AS VELOCIDADES DE PROPAGAÇÃO DAS ONDAS DE ACELERAÇÃO

Se tomarmos o salto das equações de balanço, de momento linear (2.2) obtemos:

$$[\rho_1 \dot{v}_1] = [\mathrm{div}\ T_1] + [m^0] + [\ell] + [\rho_1 f_1] ,$$

$$[\rho_2 \dot{v}_2] = [\mathrm{div}\ T_2] - [m^0] - [\ell] + [\rho_2 f_2] . \tag{6.1}$$

Por outro lado, é fácil verificar que o salto de R é nulo pois pela equação *(4.7)* e pelas hipóteses do item 5 tem-se que:

$$\ell^{0} = 0 \; ; \quad [a] = [g] = 0 \quad ; \quad a^{+} = g^{+} = 0 \; ,$$

consequentemente:

$$[R] = \hat{\ell}\,(\rho_1^{-}, \theta^{-}, a^{-}, g^{-}, b^{-}, F^{-}, \mathbb{F}^{-})$$

$$- \hat{\ell}(\rho_1^{+}, \theta^{+}, a^{+}, g^{+}, b^{+}, F^{+}, \mathbb{F}^{+}) = 0 \qquad (6.2)$$

Considerando-se que:

$$[f_1] = [f_2] = 0 \quad ,$$

e substituindo-se as equações $(3.1)_6$, (4.6), (5.1), (5.4), (5.5), (5.6), (6.2) nas equações *(6.1)*, após certas manipulações algébricas, chega -se a:

$$\rho_1^{+}\, \nu^2\, s_1 = \xi_1\,(s_1 \cdot n)n + \xi_2(s_2 \cdot n)\,n$$

$$+ \xi_3(s_2 \cdot p)\cos\theta\, n \; ,$$

$$\rho_2^{+}\, \nu^2\, s_2 = \xi_4(s_1 \cdot n)\,n + \xi_5(s_2 \cdot n)n$$

$$+ \xi_6(s_2 \cdot p)\cos\theta\, n + \xi_7\, s_2 + \xi_8 \cos^2\theta\, s_2$$

$$+ \xi_9(s_1 \cdot n)\cos\theta\, p + \xi_{10}(s_2 \cdot n)\cos\theta\, p$$

$$+ \xi_{11}(s_2 \cdot p)p + \xi_{12}(s_2 \cdot p)\cos^2\theta\, p \quad , \qquad (6.3)$$

onde: $(n . p) = \cos\theta$; e se $\sigma = \mathrm{tr}\,\hat{E}$ e $\tau = p \cdot \hat{E}\, p$

então:

$$\xi_1 = \{\rho_1^2(\partial_{\rho_1}\mu_1)\}^{+} \; ,$$

$$\xi_2 = -\{\rho_1(\partial_{\sigma}\mu_1)\}^{+} \; ,$$

$$\xi_3 = -\{\rho_1(\partial_\tau \mu_1)\}^+ ,$$

$$\xi_4 = -\{\rho_1(\partial_{\rho_1} \Pi_2) - \Pi_1^0 + \rho_1^2(\partial_{\rho_1} \psi_1^0)\}^+ ,$$

$$\xi_5 = \{\partial_\sigma \Pi_2 + \rho_1(\partial_\sigma \psi_1^0) + \beta_2/2 - \beta_5/2\}^+ ,$$

$$\xi_6 = \{\partial_\tau \Pi_2 + \rho_1(\partial_\tau \psi_1^0) + \beta_6/2 - \beta_7/2\}^+ ,$$

$$\xi_7 = \{\beta_2/2 + \beta_5/2\}^+ ,$$

$$\xi_8 = \{\beta_6/2 + \beta_7/2\}^+ ,$$

$$\xi_9 = -\{\rho_1(\partial_{\rho_1} \beta_1)\}^+ ,$$

$$\xi_{10} = \{\partial_\sigma \beta_1 + \beta_3/2 + \beta_4/2\}^+ ,$$

$$\xi_{11} = \{\beta_3/2 - \beta_4/2\}^+ ,$$

$$\xi_{12} = \{\partial_\tau \beta_1\}^+ .$$

As seguintes relações:

$$\xi_4 = \xi_2 \text{ e } \xi_9 = \xi_3 ,$$

são válidas, pois podemos escrever:

$$\Pi_2 = \partial_\sigma(\rho\psi_I) + \rho_2^+ \psi_2 ,$$

$$\beta_1 = \partial_\tau(\rho\, \psi_I) ,$$

consequentemente

$$\xi_9 = -\{\rho_1(\partial_{\rho_1} \beta_1)\}^+ = -\{\rho_1(\partial_{\rho_1} \partial_\tau (\rho\, \psi_I)\}^+$$

$$= -\{\rho_1(\partial_\tau \mu_1)\}^+ = \xi_3 ,$$

$$\xi_4 = -\{\rho_1(\partial_\rho \Pi_2) - \Pi_1^0 + \rho_1^2(\partial_\rho \psi_1^0)\}^+$$

$$= -\{\rho_1 \partial_{\rho_1} (\partial_\sigma(\rho\, \psi_I) + \rho_2^{+} \psi_2) - \Pi_1^0 +$$

$$+ \rho_1^2 (\partial_{\rho_1} \psi_1^0)\}^{+} = -\{\rho_1 (\partial_\sigma \mu_1) - \Pi_1^0 + \rho_1^2 (\partial_{\rho_1} \psi_1^0) +$$

$$+ \rho_1\rho_2 (\partial_{\rho_1} \psi_2)\}^{+} = -\{\rho_1 (\partial_\sigma \mu_1)\}^{+} = \xi_2 \ ,$$

pois: $\mu_1 = \partial_{\rho_1} (\rho\, \psi_I)$ e $\Pi_1^0 = \{\rho_1^2 (\partial_{\rho_1} \psi_1^0) + \rho_1\rho_2 (\partial_{\rho_1} \psi_2)\}^{+}$.

A determinação das velbcidades de propagação ν^2, através das equações (6.3), para o caso em que n e p têm orientações quaisquer, é complicada. Iremos, portanto, analisar somente os casos onde podemos determinar as velocidades explicitamente.

6.1. Direção de Propagação Perpendicular ao Eixo de Isotropia Transversal

Neste caso, as equações (6.3) reduzem-se a:

$$\rho_1^{+} \nu^2 s_1 = \xi_1 (s_1 . n) n + \xi_2 (s_2 . n) n \ ,$$

$$\rho_2^{+} \nu^2 s_2 = \xi_2 (s_1 . n) n + \xi_5 (s_2 . n) n$$

$$+ \xi_7 s_2 + \xi_{11} (s_2 . p) p \ . \qquad (6.4)$$

Adotando-se a notação de Bowen[1], as seguintes equações podem ser obtidas de (6.4), através do produto interno com n e p:

$$(Q - \nu^2 M) s = 0 \ , \qquad (6.5)$$

onde (*):

(*) O sistema de coordenadas adotado é Cartesiano com coordenadas x_i ($i = 1,2,3$), onde o vetor unitário p coincide em direção com o eixo X_1.

$$
Q = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & 0 \\ \xi_2 & \xi_5 + \xi_7 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_7 + \xi_{11} \end{bmatrix} ;
$$

$$
M = \begin{bmatrix} \rho_1^+ & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2^+ & 0 \\ 0 & 0 & \rho_2^+ \end{bmatrix} , \quad s = \begin{bmatrix} s_1 \cdot n \\ s_2 \cdot n \\ s_2 \cdot p \end{bmatrix}
$$

Por outro lado, fazendo-se o produto vetorial das equações (6.4) com n temos:

$$
\rho_1^+ \nu^2 s_1 \times n = 0 ,
$$

$$
\rho_2^+ \nu^2 s_2 \times n = \xi_7 s_2 \times n + \xi_{11} (s_2 . p) \, p \times n . \qquad (6.6)
$$

As velocidades de propagação ν^2 são obtidas igualando-se a zero o determinante da matriz dos coeficientes da equação (6.5).

$$
\nu_1^2 = (\xi_7 + \xi_{11}) \, / \, \rho_2^+
$$

$$
2 \nu_2^2 = \left(\frac{\xi_5 + \xi_7}{\rho_2^+} + \frac{\xi_1}{\rho_1^+} \right) + \sqrt{\left(\frac{\xi_5 \quad \xi_7}{\rho_2^+} \quad \frac{\xi_1}{\rho_1^+} \right)^2 + \frac{4\xi_2^2}{\rho_1^+ \rho_2^+}}
$$

$$
2 \nu_3^2 = \left(\frac{\xi_5 + \xi_7}{\rho_2^+} + \frac{\xi_1}{\rho_1^+} \right) - \sqrt{\left(\frac{\xi_5 + \xi_7}{\rho_2^+} - \frac{\xi_1}{\rho_1^+} \right)^2 + \frac{4\xi_2^2}{\rho_1^+ \rho_2^+}}
$$

$$
(6.7)
$$

Se substituirmos a equação $(6.7)_1$ na equação $(6.6)_2$ e supusermos que $<_{11} \# 0$ temos:

$$
s_2 \times n = (s_2 . \, p) \, p \times n ,
$$

portanto s_2 é paralelo a p e, além disso, é fácil verificar (vide (6.4)$_1$) que $s_1 = 0$. Sendo assim, a onda com velocidade ν_1^2 é segundo o eixo de isotropia transversal e se propaga no sólido.

Para outras duas velocidades, segundo a equação $(6.4)_2$, verifica-se que $(s_2 . p) = 0$, consequentemente, com base na equação $(6.6)_2$, $(s_2 \times n) = 0$. Como $(s_1 \times n) = 0$, estas duas últimas ondas são longitudinais tanto para o sólido como para o fluido.

6.2. Direção de Propagação paralela ao Eixo de Isotropia Transversal

Seguindo-se o mesmo raciocínio que o do item 6.1., temos:

$$\rho_1^+ \nu^2 s_1 = \xi_1 (s_1 . n) n + (\xi_2 + \xi_3)(s_2 . n) n ,$$

$$\rho_2^+ \nu^2 s_2 = (\xi_2 + \xi_3)(s_1 . n) n + (\xi_7 + \xi_8) s_2$$

$$+ (\xi_5 + \xi_6 + \xi_{10} + \xi_{11} + \xi_{12})(s_2 . n) n ,$$

$$(Q - \nu^2 M) s = 0 ,$$

$$\rho_1^+ \nu^2 s_1 \times n = 0 ,$$

$$(\rho_2^+ \nu^2 - (\xi_7 + \xi_9)) s_2 \times n = 0 , \qquad (6.8)$$

onde:

$$Q = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 + \xi_3 \\ \xi_2 + \xi_3 & \Lambda \end{bmatrix} ,$$

$$M = \begin{bmatrix} \rho_1^+ & 0 \\ 0 & \rho_2^+ \end{bmatrix} , \qquad s = \begin{bmatrix} s_1 . n \\ s_2 . n \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = \xi_5 + \xi_6 + \xi_7 + \xi_8 + \xi_{10} + \xi_{11} + \xi_{12}$$

Neste caso existem três tipos de onda:

i) transversal apenas no sólido

$$(s_1 = 0\ ,\quad s_2 . n = 0\ )$$
$$\nu_1^2 = (\xi_7 + \xi_9)\ /\ \rho_2^+\ , \tag{6.9}$$

ii) longitudinais no sólido e no fluido

$$(s_1 \times n = s_2 \times n = 0\ )$$

$$2\ \nu_2^2 = \left(\frac{\xi_1}{\rho_1^+} + \frac{\Lambda}{\rho_2^+}\right) + \sqrt{\left(\frac{\xi_1}{\rho_1^+} - \frac{\Lambda}{\rho_2^+}\right)^2 + 4\Delta}\ ,$$

$$2\nu_3^2 = \left[\frac{\xi_1}{\rho_1^+} + \frac{\Lambda}{\rho_2^+}\right] - \sqrt{\left(\frac{\xi_1}{\rho_1^+} - \frac{\Lambda}{\rho_2^+}\right)^2 + 4\Delta}\ , \tag{6.10}$$

onde:

$$\Delta = \left(\frac{\xi_2 + \xi_3}{\rho_1^+}\right)^2$$

E fácil verificar que, se a mistura for isotrópica:

$$\xi_3 = \xi_6 = \xi_8 = \xi_{10} = \xi_{11} = \xi_{12} = 0\ ,$$

e as equações (6.8), (6.9) e (6.10) reduzem-se às do item 2.10 de Bowen[1].

REFERÊNCIAS

1. Bowen, R.M.; "Theory of Mixtures" em *Continuum Physics*, Vol. III (ed. A.C. Eringen) Academic Press, New York, London, San Francisco, 1976.
2. Truesdell, C. e R.A. Toupin; "The Classical Field Theories" em *Hand-*

buch der Physik , Band III/1 (ed. S. Flügge), Springer Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1960.

3. Biot, M.A.; J.Appl.Phys., 26, 182-185 (1955).
4. Liu, I-Shih; J. de Mécanique, *19*, 327 (1980).
5. Truesdell, C. e W.Noll; "The Non-Linear Field Theories of Mechanics" em *Handbuch der Physik* , Band III/3 (ed. S. Flügge), Springer - Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1965.
6. Liu, I-Shih; "A Note on Transversely Isotropic Functions", a ser submetido para publicação.