Revista Brasileira de Física, Vol. 11, Nº 2, 1981

Um Exemplo de Como Não Usar Teoremas Matemáticos em Problemas Rsicos

EDGAR FRANCISCO DAS CHAGAS e NIVALDO AGOSTINHO LEMOS*

Instituto de Física, Universidade Federal Fluminense, Niterói, RJ

Recebido em 20 de Outubro de 1980

The virial theorem is applied to the case of a particle moving on an elliptic orbit in a central field. The theorem is acritically employed in cartesian and polar coordinates. The use of the theorem in polar coordinates leads to an absurd result. A more accurate analysis of the validity conditions of the theorem reveals that, in fact, it is not applicable in polar coordinates.

O teorema do virial é aplicado ao caso de uma partícula movendo-se ao longo de uma órbita elíptica num campo central. O teorema é empregado acriticamente em coordenadas cartesianas e polares. A utilização do teorema em coordenadas polares conduz a um resultado absurdo. Uma análise mais apurada das condições de validade do teorema revela que, na verdade, ele não é aplicável em coordenadas polares.

1. INTRODUÇÃO

Uma das características básicas que distinguem os físicos dos matemáticos é que estes só aplicam um determinado teorema num caso específico depois de terem verificado que as condições que asseguram a validade do teorema são satisfeitas. Em contrapartida, é prática corriqueira entre os físicos a utilização de resultados matemáticos sem importarem-se com suas condições de validade e até mesmo, em determinadas situações, desconhecendo-as por completo. É certo que nem sempre é possível verifi-

* Parcialmente sustentado por uma bolsa de doutorado do CNPq.

car se as hipóteses de certos teoremas são efetivamente satisfeitas. Assim, por exemplo, na teoria geral da mecânica quântica troca-se freqüentemente, e sem cerimônia, a ordem de operações tais como de integração, diferenciação e soma infinita[1]. Em exemplos concretos, todavia, espera-se que sempre seja possível justificar tais procedimentos.

Este hábito deletério dos físicos é facilmente atribuível à má educação matemática que recebemos. A "matemática" que aprendemos não passa de uma técnica de manipular símbolos cujo significado preciso desconhecemos. Uma vez aprendida a técnica, a sua utilização torna-se um processo puramente mecânico: os resultados matemáticos passam a ser encarados como meras receitas válidas em qualquer situação. São evidentes os sérios riscos que uma atitude deste tipo acarreta. Portanto, tal atitude não deve ser estimulada nos estudantes de Física. Ao contrário, deve-se despertar o espírito critico dos estudantes em relação a este problema. Neste sentido, sempre que possível, quaisquer teoremas relevantes devem ser empregados com as devidas ressalvas e justificativas.

Dentro deste espírito, e à guisa de exempio, propomo-nos a apresentar uma situação concreta em que a utilização direta de um teorema fora de sua região de aplicabilidade conduz a um aparente paraduxo. O exemplo que analisaremos tem por base a aplicação do teorema do virial a uma partícula descrevendo uma órbita elíptica sob a ação de uma força central atrativa inversamente proporcional ao quadrado da distância, e deverá ser facilmente cornpreendido por qualquer estudante familiarizado com o formalismo hamiltoniano da mecânica clássica e com propriedades gerais do movimento de uma partícula num campo central.

2. O TEOREMA DO VIRIAL

Seja f uma função real da variável real t. O valor médio de f é definido por

$$\langle f\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt \tag{2.1}$$

sempre que este limite existir. Se, por exemplo, f for uma função periódica e integrável num período, o limite existe e é dado simplesmente por

$$\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)dt$$

onde, na expressão acima, T_0 é o período de f.

Considere, agora, um sistema mecânico com n graus de liberdade descrito pelas variáveis canônicas q, p e pela hamiltoniana[2] $H(q,p,t)$. Então temos o

Teorema do *Virial*[3]. Se $q_i(t)$ e $p_i(t)$ forem *funções limitadas*[4] do tempo e se os valores médios de $\sum_i p_i \frac{\partial H}{\partial p_i}$ e de $\sum_i q_i \frac{\partial H}{\partial q_i}$ *existirem*, então eles serão iguais, isto é,

$$<\sum_i p_i \frac{\partial H}{\partial p_i}> = <\sum_i q_i \frac{\partial H}{\partial q_i}> \tag{2.2}$$

Demonstração. Defina a função

$$G(t) = \sum_i p_i(t)\ q_i(t)\ . \tag{2.3}$$

Como q_i e p_i são funções limitadas do tempo, G também o é. Diferenciando a Eq. (2.3) em relação ao tempo obtemos

$$\frac{dG}{dt} = \sum_i p_i\,\dot{q}_i + \sum_i \dot{p}_i\,q_i\ . \tag{2.4}$$

Usando as equações de Hamilton

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}\ ,\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{2.5}$$

na Eq. (2.4) resulta

$$\frac{dG}{dt} = \sum_i p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - \sum_i q_i \frac{\partial H}{\partial q_i}\ . \tag{2.6}$$

Tomando o valor médio da Eq. (2.6) obtemos

$$<\frac{dG}{dt}> = <\sum_i p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - \sum_i q_i \frac{\partial H}{\partial q_i}> \tag{2.7}$$

Mas

$$\langle \frac{dG}{dt} \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dG}{dt}\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{G(T) - G(0)}{T} = 0 \tag{2.8}$$

porque o numerador é limitado (G é limitada) mas o denominador cresce indefinidamente. Com as demais hipóteses do teorema[5] somos conduzidos à Eq. (2.2), como queríamos demonstrar.

Procuramos explicitar ao máximo, nesta demonstração, as hipóteses que asseguram a validade do teorema, hipóteses estas que foram sublinhadas em seu enunciado.

3. UM APARENTE PARADOXO

Considere uma partícula movendo-se num plano sob a ação de uma força central atrativa e inversamente proporcional ao quadrado da distância à origem do sistema de referência inercial (por exemplo, força gravitacional ou eletrostática). Vamos nos restringir ao caso em que a energia total é negativa, pois nesta situação o movimento é limitado e periódico, e as órbitas são fechadas (elipses). A energia potencial é da forma $V = -k/r$ onde k é uma constante positiva.

Em coordenadas cartesianas podemos escrever

$$H = T + V = \frac{1}{2m}\,(p_x^2 + p_y^2) - k/(x^2 + y^2)^{1/2} . \tag{3.1}$$

Com esta hamiltoniana obtemos

$$\sum_i p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} = p_x \frac{\partial H}{\partial p_x} + p_y \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{1}{m}\,(p_x^2 + p_y^2) = 2T \tag{3.2}$$

onde T é a energia cinética. Por outro lado

$$\sum_i q_i \frac{\partial H}{\partial q_i} = x \frac{\partial H}{\partial x} + y \frac{\partial H}{\partial y} = x \frac{\partial V}{\partial x} + y \frac{\partial V}{\partial y} . \tag{3.3}$$

Mas

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{dV}{dr}\,\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}\,\frac{dV}{dr}$$

e

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{dV}{dr}\,\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}\,\frac{dV}{dr} \quad .$$

Levando estes últimos resultados na Eq. (3.3) encontramos

$$\sum_i q_i \frac{\partial H}{\partial q_i} = r \frac{dV}{dr} \quad . \tag{3.4}$$

Substituindo (3.2) e (3.4) em (2.2) resulta

$$2\langle T\rangle = \langle r \frac{dV}{dr}\rangle = \langle r \frac{k}{r^2}\rangle = -\langle V\rangle \quad , \tag{3.5}$$

que é o resultado usual.

Aparentemente o teorema do virial é válido quaisquer que sejam as variáveis canônicas que apareçam na Eq. (2.2). Portanto vamos examinar a mesma situação usando coordenadas polares no lugar das cartesianas. Neste sistema de coordenadas a hamiltoniana escreve-se como[6]

$$H = T + V = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right) - \frac{k}{r} \quad . \tag{3.6}$$

Obtemos, conseqüentemente[7],

$$\sum_i p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} = p_r \frac{\partial H}{\partial p_r} + p_\theta \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{1}{m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right) = 2T \tag{3.7}$$

Da mesma forma

$$\sum_i q_i \frac{\partial H}{\partial q_i} = r \frac{\partial H}{\partial r} + \theta \frac{\partial H}{\partial \theta} = -\frac{p_\theta^2}{mr^2} - V \quad . \tag{3.8}$$

Levando (9.7) e (3.8) na Eq. (2.2) vem

$$2\langle T\rangle = -\langle V\rangle - \langle\frac{p_\theta^2}{mr^2}\rangle \quad . \tag{3.9}$$

Comparando (3.9) com (3.5) concluímos que

$$\langle\frac{p_\theta^2}{mr^2}\rangle = 0 \quad . \tag{3.10}$$

Como θ é variável cíclica da hamiltoniana (3.6), p_θ é constante de movimento. Para órbitas elípticas $p_\theta \neq 0$. Concluímos, finalmente, que

$$<\frac{1}{r^2}> = 0 \ . \tag{3.11}$$

Este resultado, entretanto, é impossível porque $1/r^2(t) > 0$ para qualquer valor de t, de modo que seu valor médio tem que ser necessariamente maior do que zero. Chegamos, deste ínodo, a um resultado aparentemente paradoxal.

4. A SOLUÇÃO *DO* "PARADOXO"

Examinemos mais de perto as duas aplicações que fizemos do teorema do virial. Observemos, em primeiro lugar, que as coordenadas cartesianas são funções limitadas do tempo porque

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leqslant \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} = r(t), \\ |y(t)| &\leqslant \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} = r(t), \end{aligned} \tag{4.1}$$

e r é uma função limitada do tempo para órbitas elípticas. Por outro lado, como o movimento é periódico, vê-se trivialmente que os valores médios de T e V são bem definidos. A conclusão é que o teorema do virial é válido em coordenadas cartesianas.

Vejamos, agora, o que acontece em coordenadas polares. Como já mencionamos, r é função limitada do tempo. Mas e quanto a θ? É fácil ver que θ **não** é função limitada do tempo, pois a cada volta completa que a partícula executa o ângulo θ aumenta (ou diminui) de 2π radianos. Conseqüentemente o ângulo θ cresce (ou decresce) indefinidamente com o tempo. Este resultado pode ser provado analiticamente da forma seguinte. A equação de Hamilton para θ fornece

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} \ , \tag{4.2}$$

com p_θ constante. Seja $t > 0$. Então

$$\theta(t) - \theta(0) = \frac{p_\theta}{m}\int_0^t \frac{ds}{r^2(s)} \tag{4.3}$$

Seja R o valor máximo que $r(t)$ pode assumir na órbita elíptica (este ponto corresponde ao afélio). É evidente, então, que

$$\frac{1}{r^2(s)} \geqslant \frac{1}{R^2} \tag{4.4}$$

para qualquer valor de s. Portanto

$$|\theta(t) - \theta(0)| = \frac{|p_\theta|}{m}\int_0^t \frac{ds}{r^2(s)} \geqslant \frac{|p_\theta|}{m}\int_0^t \frac{ds}{R^2} = \frac{|p_\theta|}{mR^2}\,t, \tag{4.5}$$

o que demonstra que θ não é função limitada do tempo. O "paradoxo" é resolvido, então, notando que de fato a Eq. (3.11) não é verdadeira porque o teorema do virial não é aplicável em coordenadas polares, já que as hipóteses que asseguram a validade do teorema são violadas. Na verdade a Eq. (2.2) é válida em qualquer sistema de variáveis canônicas no qual as condições de *validade do teorema sejam* satisfeitas.

Registre-se que o simples fato de o movimento ser espacialmente limitado não assegura que os q_i, p_i sejam funções limitadas do tempo. Isto depende fundamentalmente, como acabamos de ver, da natureza e do significado físico das coordenadas e momentos generalizados.

Queremos salientar neste ponto que no problema que acabamos de investigar foi fácil descobrir o erro em que havíamos incorrido. Isto porque. no nosso caso, o problema físico é simples e bem conhecido, o que torna possível, de forma relativamente simples, a visualização direta do erro existente no resultado final. Note-se que a Eq. (3.9) obtida em coordenadas polares parece razoável à primeira vista. Só depois da comparação desta equação com a obtida em coordenadas cartesianas é que tornou-se possível perceber que a Eq. (3.9) não podia ser verdadeira. Isto nos leva a concluir que a situação com que deparamos é critica pois, se estivéssemos lidando com um problema físico mais complexo, e se não conhecêssemos a priori os resultados a que deveriamos chegar, poderiamos nos defrontar com resultados errôneos sem nos darmos conta disso.

REFERÊNCIAS E NOTAS

1. Ver, por exemplo, o prefácio de L. I. Schiff, Quantum Mechanics, McGraw-Hill, New York (1968), 3ª edição.

2. Usamos "hamiltoniana", no feminino, quando nos referimos à função clássica, enquanto que "hamiltoniano", no masculino, reservamos para o operador da mecânica quântica. Vide Aurélio Buarque de Holanda Ferreira, Novo Dicionário da Língua Portuguesa, Ed. Nova Fronteira (1975). Do mesmo modo a função de Lagrange é chamada de "lagrangiana", no feminino. Os termos "lagrangeana" e "lagrangeano" não estão registrados no Aurélio.

3. Ver, por exemplo, H.C.Corben e P.Stehle, Classical Mechanics, Wiley (1960), 2ª edição, pág. 164.

4. Uma função real f de uma variável real t é dita limitada se existe um número real não-negativo M tal que $|f(t)| \leqslant M$ para qualquer valor de t pertencente ao domínio de f.

5. Cabe ressaltar que $\langle f+g\rangle = \langle f\rangle + \langle g\rangle$ só é verdade se os valores médios de f e g existirem separadamente. Examine o seguinte exemplo:

$$f(t) = 1 + t \ , \quad g(t) = 1 - t .$$

6. Ver, por exemplo, H. Goldstein, Classical Mechanics, Addison-Wesley (1950), 1ª edição, pág. 221.

7. As Eqs. (3.2) e (3.7) poderiam ser antecipadas sem cálculos diretos observando que

$$\sum_i p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} = \sum_i p_i \dot{q}_i = \sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2T$$

sempre que T for função homogênea do segundo grau nas velocidades e V for independente das velocidades. É exatamente isto o que ocorre com as hamiltonianas (3.1) e (3.6).