Revista Brasileira de Ffsica, Vol. 11, nº 1, 1981

Transformation de Fourier de Distribwtions Invariants

CARMEN LYS RIBEIRO BRAGA

Departamento de Física, Instituto de Física, Universidade de São Paulo, São Paulo, SP

Recebido em 15 de Agosto de 1980

On s'est proposé de rechercher les transformées de Fourierde certaines familles de distributions sur R^n $(n \geq 2)$ invariantes dans le groupe propre de Lorentz, a savoir, les distributions associées aux fonctions $u^{p/2} \log^m |u|$, u étant la forme quadratique $u = x_n^2 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2$, pour tout complexe p et tout entier $m \geq 0$, et aux derivées $\delta^{(k)}(n)$, $k \geq 0$, de la distribution de Dirac. Ces distributions sont liées aux solutions invariantes de l'équation $\Box T = \delta_0$ et, dans le cas $m=0$, ont été étudiées par P. D. Methée[2] qui en a, ultérieurernent[3] calculé les iniages de Fourier. La méthode qu'on developpe ici s'appuie sur le prolongement analytique d'une formule due à M.Laurent Schwartz[1].

Propõe-se determinar as transformadas de Fourier de certas famílias de distribuições sobre R^n $(n \geq 2)$ invariantes pelo grupo próprio de Lorentz, a saber, as distribuições associadas às funções $u^{p/2} \log^m |u|$, u sendo a forma quadrática $u = x_n^2 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2$, para todo complexo p e todo inteiro $m \geq 0$ e às derivadas $\delta^{(k)}(n)$, $k \geq 0$, da distribuição de Dirac. Essas distribuições relacionam-se com as soluções invariantes da equação $\Box T = \delta_0$ e, no caso $m=0$, foram estudadas por P.D.Methée[2], que mais tarde calculou suas imagens de Fourier. O método que se desenvolveu aqui se apoia sobre o prolongamento analítico de uma fórmula de M.Laurent Schwartz[1].

1. INTRODUCTION

On s'est proposé dans ce travail de rechercher les transformées de Fourier de certaines familles de distributions invariantes dans le groupe propre de Lorentz. Il s'agit des distributions définies dans l'espace R^n muni de la forme quadratique $u = x_n^2 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2$ et associées aux fonctions $u^{p/2} \log^m |u|$, p étant complexe et $m=0,1,2,\dots$, et aux dérivées de tout ordre de la distribution de Dirac $\delta(u)$. Ces distributions, dans le cas $m=0$, ont été étudiées dans la Thèse de doctorat de M.P.D.Methée[2], qui dans deux Notes ultérieures[3] a publié leurs images de Fourier.

On développe ici une méthode différent pour obtenir les mêmes transformées, laquelle s'appuie sur le prolongement analytique d'une formule due à M.Laurent Schwartz[1]. Cette méthode donne en plus les images de Fourier des $u^{p/2} \log^m |u|$, $m = 1,2,\dots$. On supposera connus les fondements de la théorie des distributions, dont on trouve un exposé approfondi dans le livre de M. Laurent Schwartz[1].

Je tiens à témoigner ma profonde gratitude à M. Laurent Schwartz qui m'a toujours assistée, conseillée, guidée, pendant mon séjour en France. C'est lui qui a choisi le sujet de ce travail et m'en a donné l'idée basique. C'est donc avec joie que je lui présente ici mes plus sincères remerciements.

M. Jean Lavoine, attaché au C.N.R.S., a bien voulu s'occuper de la revision des calculs et d'y faire de précieuses critiques. Je lui exprime ici ma bien vive reconnaissance.

Enfim, je désire remercier le Conselho Nacional de Pesquisas, de Rio de Janeiro, pour la bourse d'études qui m'a été accordée, grâce à laquelle j'ai pu préparer ce travail.

2. NOTIONS GENÉRALES

On appelle rotation propre de Lorentz toute transformation linéaire homogène

$$x_i' = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, x_k \tag{1}$$

dont le déterminant $|a_{ik}|$ est égal à +1 et qui laisse invariante la forme quadratique

$$u = x_n^2 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \tag{2}$$

Nous poser'ons $x_n = t$, qui sera la variable du temps. L'équation u = const. définit dans R^n une hypersurface qui est un hyperboloide à deux nappes , si $u>0$; un hyperboloide à une nappe, si $u<0$ et se réduit à un cône (cône de lumière), si $u=0$. Une transformation de Lorentz laisse inchangés les hyperboloides à une nappe, mais les hyperboloides à deux nappes peuvent ou bien rester invariés, ou bien invertir leurs nappes. Dans le premier cas, on dit que la transformation est orthochrone et dans le second, qu' elle est antichrone. Un example de rotation de Lorentz antichrone est donné par la réfléxion par rapport à x_n (inversion du temps):

$$x'_n = -x_n, \quad x'_i = x_i, \quad i = 1,2,\dots,n-1$$

On sait que l'ensemble des rotations propres orthochrones de Lorentz constitue un groupe que est appelé le groupe propre de Lorentz.

Désignons par L la rotation de Lorentz qui envoie le point x = $= (x_1,\dots,x_n)$ dans le point $x' = Lx$, $x' = (x'_1,\dots,x'_n)$, et par L^{-1} la rotation inverse. Chaque fonction $f(x)$ dans R^n est transformée dans la fonction

$$f'(x') = Lf(x') = f(L^{-1}x') \tag{4}$$

D'une façon analogue, chaque distribution T dans R^n est transformée dans la distribution définie par

$$\langle T',\phi\rangle = \langle LT,\phi\rangle = \langle T,L^{-1}\phi\rangle, \quad \phi \in (\mathcal{D}x) \tag{4'}$$

Une distribution T est dite invariante si, pour toute rotation propreorthochrone L, l'on a $LT = T$. Unedistribution invariant est dite symétrique si, pour toute rotation antichrone L', l'on a $L'T = T$; si $L'T = -T$, alors elle est dite antisymétrique.

La transformation de Fourier d'une fonction $f(x)$ dans R^n muni de la forme quadratique (1.2) est définie par

$$(Ff)(y) = \int_{R^n} f(x)\, e^{-2i\pi\, x,y \cdot}\, dx$$

et la transformation conjuguée par (5)

$$(\bar{F}f)(y) = \int_{R^n} f(x)\, e^{2i\pi <x,y>}\, dx,$$

$$x,y = x_n y_n - \ldots - x_2 y_2 - x_1 y_1 \ , \quad dx = dx_1 dx_2 \ldots dx_n \ .$$

La transformation de Fourier peut être aussi définie pour les distributions tempérées[1], les seules à avoir une transformée de Fourier, par les relations

$$\left.\begin{array}{l} <FT,\phi> = <T,F\phi> \\ <\bar{F}T,\phi> = <T,\bar{F}\phi> \end{array}\right. \quad \phi \in (S) \qquad (5')$$

et l'on a $\bar{F}F = F\bar{F} = I$. Il se trouve que l'image de Fourier de toute distribuyion invariante tempérée est elle aussi invariante, comme on peut voir aisément. Si l'on désigne par $\overline{T}$ la transformée de 2' par la transformation (1.3) et par T*, la complexe conjuguée de T, on a les formules suivantes

$$\begin{aligned} &(\overline{FT}) = F\overline{T} = \bar{F}T \\ &(FT)^* = FT^* = \bar{F}T^* \qquad (6) \\ &(\overline{FT})^* = F\overline{T}^* = F\overline{T}^* \end{aligned}$$

Passons maintenant à considérer la distribution de Riesz--Schwartz Z_q, dépendant du paramètre complexe q, laquelle est égale, si Re $q \geq n$ [2] à la fonction

---

(1) Une distribution tempérée est une forme linéaire et continue sur l'espace (S) des fonctions indéfiniment dérivables, qui décroissent rapidement à l'infinit, avec toutes leurs dérivées.

(2) Re q dénote "la partir réelle de q".

$$Z_q = \frac{1}{\pi^{(n-2)/2}\, 2^{q-1}\, \Gamma(\frac{q}{2})\, \Gamma(\frac{q+2+n}{2})} s^{q-n} \tag{7}$$

$$s^2 = x_n^2 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2 \geqslant 0 \,, \quad x_n \geqslant 0$$

Cette fonction n'est plus sommable au voisinage du cône d'ondes futur, si Re q < n, mais dans ce cas, on peut encore définir une distribution, par le procedê de la "partie finie", pourvu que q n'appartienne pas à la double suite des valeurs

$$\begin{matrix} 0, -2, -4, \dots \\ n-2, n-4, n-6. \dots \end{matrix} \tag{8}$$

qui annulent le coefficient de la distribution. Enfim, Z_q, q étant une des ces valeurs, est définie par passage à la limite. Il en résulte que Z_q est une fonction analytique entière de la variable complexe . En plus, Z_q est tempérée pour tout q et pour Re q < 0, som irnage de Fourier, selon M. Schwartz, est égale à la fonction

$$g(y) = \begin{cases} \left[(\frac{1}{2\pi})^q \exp(-i\pi q/2)\right] (y_n^2 - y_1^2 - \quad - y_{n-1}^2)^{-q/2} & \text{à l'interieur du cône d'ondes futur } (y_n \geqslant 0) \\ \left[(\frac{1}{2\pi})^q \exp(+i\pi q/2)\right] (y_n^2 - y_1^2 - \dots y_{n-1}^2)^{-q/2} & \text{à l'intérieur du cône d'ondes passé } (y_n \leqslant 0) \\ (\frac{1}{2\pi})^q (-y_n^2 + y_1^2 + \dots y_{n-1}^2)^{-q/2} & \text{à l'exterieur du cône.} \end{cases} \tag{9}$$

Pour obtenir cette transformée dans le cas Re q > 0, on procèdera au prolongement analytique, par rapport à q, de la fonction $g(y)$, en tenant compte de ce que FZ_q est une fonction analytique entière de q. La distribution ainsi obtenue peut avoir des singularités en q, dans chacune des trois régions de l'espace définies par le cône, mais elles se compensent et sont supprimées dans R^n.

Il nous faut d'abord expliciter le sens de l'expression "partie finie de s^p", lorsque Re $p < 2$. Pour cela on doit se rapporter à la Thèse de M. Methée, dont on donne ici quelques résultats.

Si f est l'application de R^n dans R qui envoie le point $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sur le point d'abscisse

$$u = x_n^2 - x_1^2 - \ldots - x_{n-1}^2$$

de R, soit f_+ la restriction de f au complémentaire $\complement\bar{\Omega}_2$ de l'ensemble fermé $\bar{\Omega}_2$ $(u \geqslant 0,\ x_n \leqslant 0)$ et f_- la restriction de f au complémentaire $\complement\bar{\Omega}_1$ de $\bar{\Omega}_1$ $(u \geqslant 0,\ x \leqslant 0)$. Alors, à chaque couple (T,U) de distributions sur la droite, égales dans la demi-droite $u < 0$, correspond une distribution S, invariante dans $R^n - 0$ (complémentaire de l'origine), égale à $f_+^* T$ dans $\complement\bar{\Omega}_2$ et à $f_-^* U$ dans $\complement\bar{\Omega}_1$ ($f_\pm^* T$ désigne l'image transposée de T par $f_\pm^*$). Réciproquement, à toute distribution S invariante dans $R^n - 0$, correspond une paire (T,U) de distributions sur la droite, telles que $T = U$ dans $u < 0$.

La distribution associée à la paire (T,U) n'est pas, en général, définie dans R^n, mais, si le support de T ne contient pas le point $u=0$, l'origine n'adhère pas au support de $f_+^* T$ et alors $f_+^* T$ est définie dans R^n, en convenant qu'elle est nulle au voisinage de 0.

À la paire $(\delta_\varepsilon^{(k)}, 0)$, $\varepsilon > 0$, $k = 0,1,2,\ldots$, correspond, donc, une distribution invariante $H_\varepsilon^k = f_+^* \delta_\varepsilon^{(k)}$, définie dans R^n, dont le support est la nappe supérieure de l'hyperboloide $u=\varepsilon$. À la paire $(0, \delta_\varepsilon^{(k)})$, sorrespond $\bar{H}_\varepsilon^k = f_-^* \delta_\varepsilon^{(k)}$, transformée de H^k par une inversion du temps et dont le support est la nappe inférieure de $u=\varepsilon$. La paire $(\delta_{-\varepsilon}^{(k)}, \delta_{-\varepsilon}^{(k)})$ définit une distribution notée $H_{-\varepsilon}^k$, ayant pour support l'hyperboloide à une nappe $u = -\varepsilon$.

Ces distributions tendent vers une limite finie pour $\varepsilon \to 0$, si $k < n-2/2$; tandis que, si $k \geqslant n-2/2$, il n'y a pas de limite. On peut toutefois étendre la définition de H^k dans R^n, en faisant appel à la notion de partie finie d'une fonction $g(\varepsilon)$ définie pour $\varepsilon > 0$ et non sommable pour $\varepsilon = 0$. On vérifie qu'il ne peut exister plus d'une combinaison linéaire $I(\varepsilon)$ des fonctions $\varepsilon \log^{\nu} \varepsilon$ (ν entier ? 0, Re \$ 0, le cas $\mu=\nu=0$ étant exclus), telle que $g(\varepsilon) - I(\varepsilon)$ tende vers une limite finie pour $\varepsilon \to 0$. Si telle combinaison linéaire existe, elle est appelée la partie infinie de $g(\varepsilon)$ et la limite en question est appelée la partie finie de $g(\varepsilon)$ et notée $Pf\ g(\varepsilon)$:

$$Pf\ g(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[g(\varepsilon) - I(\varepsilon) \right]$$

M. Methée applique cette notion à des fonctions de ε dont les valeurs sont des distributions et montre que les parties finies de H^k_ε, $\bar{H}^k_\varepsilon$ et $H^k_{-\varepsilon}$ existent toujours et satisfont à la relation:

$$H^k + \bar{H}^k = H^k \tag{10}$$

quel que soit l'entier $k \geq 0$.

De plus, H^0 admet un développement asymptotique illimité, pour $\varepsilon \to 0$, qui s'écrit

$$H^0_\varepsilon \sim \begin{cases} \sum\limits_{h=0}^{\infty} (A_h\, \varepsilon^h + B_h\, \varepsilon^{h+\frac{n}{2}-1} \log \varepsilon), & \text{si } n \text{ est pair} \\ \sum\limits_{h=0}^{\infty} (A_h\, \varepsilon^h + B_h\, \varepsilon^{h+\frac{n}{2}-1}), & \text{si } n \text{ est impair}, \end{cases} \tag{11}$$

A e B étant des distributions invariantes. Evidemment, il y a pour $\bar{H}^k_\varepsilon$ un développement analogue ayant pour coefficients les transformées $\bar{A}$ et $\bar{B}$ de A et B par une inversion du temps.

D'une manière analogue, s'établit le développement asymptotique de $H^0_{-\varepsilon}$:

$$H^0_{-\varepsilon} \sim \begin{cases} \sum\limits_{h=0}^{\infty} \{(-1)^h A\, \varepsilon + (-1)^{h+\frac{n}{2}-1} B_h \varepsilon^{h+\frac{n}{2}-1} \log \varepsilon\} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \sum\limits_{h=0}^{\infty} (-1)^h A_h\, \varepsilon^h, & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases} \tag{11'}$$

Les coefficients A et B sont liés aux distributions H^h et $\square^h \delta_0$ par les relations:

$$A_h = \begin{cases} \dfrac{(-1)^h}{h!} H^h, & \text{si } n \text{ est impair ou si } n \text{ est pair et } h < \dfrac{n-2}{2} \\[2ex] \dfrac{(-1)^h}{n!} H^h - \left(1 + \dfrac{1}{2} + \dots + \dfrac{1}{h}\right) B_{h - \frac{n}{2} - 1}, & \text{si } n \text{ est pair et } h \geq \dfrac{n-2}{2} \end{cases} \tag{12}$$

$$B_r = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{n/2} \pi^{(n-2)/2}}{2^{2r+1} r! \left(\frac{n}{2} + r - 1\right)!} \square^r \delta_0, & \text{si } n \text{ est pair} \\[2ex] \dfrac{(-1)^{(n-1)/2} \pi^{n/2}}{2^{2r+1} r! \, \Gamma\left(\frac{n+2r}{2}\right)} \square^r \delta_0, & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \tag{13}$$

En particulier, on a

$$B_0 = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{n/2} \pi^{(n-2)/2}}{2((n-2)/2)!} \delta_0, & n \text{ pair} \\[2ex] \dfrac{(-1)^{(n-1)/2} (2\pi)^{(n-1)/2}}{2.3.5. \dots .n-2} \delta_0, & n \text{ impair} \end{cases} \tag{13'}$$

Ces formules sont encore valables si l'on substitute $\bar{H}^h$, $\bar{A}_h$ ou bien H^h, A_h à H^h, A_h et l'on a, en plus, les relations:

$$A_h + \bar{A}_h = A_h, \quad \bar{B}_h = B_h, \quad 2B_h = B_h \tag{14}$$

pour tout h.

Ces développements peuvent être dérivés ou intégrés autant de fois que l'on veut, ce qui permet d'obtenir aisément le développement asymptotique de $H^k = (-1)^k \dfrac{d^k}{d\varepsilon^k} H^0_\varepsilon$.

Considérons maintenant la distribution $S^p_\varepsilon = f^*_+ Y_\varepsilon u^{p/2}$, associée à la paire $(Y_\varepsilon u^{p/2}, 0)$ où $Y_\varepsilon(u)$ est la fonction égale à 1 pour $u > \varepsilon$ et à 0 pour $u < \varepsilon$. On obtient, par dérivation

$$\frac{d}{d\varepsilon} S^p_\varepsilon = f^*_+ \frac{d}{d\varepsilon} Y_\varepsilon u^{p/2} = - f^*_+ \delta_\varepsilon \varepsilon^{p/2} = - \varepsilon^{p/2} H^0_\varepsilon ,$$

en vertu de la formule $\frac{d}{d\varepsilon} Y_\varepsilon = - \delta_\varepsilon$.

Il est aisé de voir que S^p_ε admet un développement asymptotique que l'on déduit de celui de H^0_ε par multiplication par $-\varepsilon^{p/2}$ suivie d'une intégration par rapport à ε. La partie infinie $I(\varepsilon)$ de S^p_ε, composée des termes qui n'ont pas de limite pour $\varepsilon \to 0$, est bien déterminée, donc, $Pf\, S^p_\varepsilon$ notée S^p, existe toujours.

Ecrivons les développements asymptotiques de S^p_ε dont nous aurons besoin dans la suite:

$$S^p_\varepsilon \sim \begin{cases} - \sum\limits_{h=0}^{m} \left\{ A_h \dfrac{\varepsilon^{h+\frac{p}{2}+1}}{h+\frac{p}{2}+1} + B_h \dfrac{\varepsilon^{h+\frac{p+n}{2}}}{h+\frac{p+n}{2}} \left(\log \varepsilon - \dfrac{1}{h+\frac{p+n}{2}}\right) \right\} + S^p & \text{si } n \text{ est pair} \\ - \sum\limits_{h=0}^{\infty} \left\{ A_h \dfrac{\varepsilon^{h+\frac{p}{2}+1}}{h+\frac{p}{2}+1} + B_h \dfrac{\varepsilon^{h+\frac{p+n}{2}}}{h+\frac{p+n}{2}} \right\} + S^p & \text{si } n \text{ est impair .} \end{cases} \tag{15}$$

pour

$$p \neq \begin{cases} -2k & k = 1,2,3,\ldots \\ -(n+2r) & r = 0,1,2,\ldots \end{cases}$$

Si p assume une des valeurs $-2k$, $-(n+2r)$, — valeurs dites exceptionnelles — on devra remplacer, dans les développements ci-dessus, $\varepsilon^0/0$ et $\varepsilon^0/0\ (\log \varepsilon - 1/0)$ par $\log \varepsilon$ et $\frac{|\log \varepsilon|^2}{2}$, respectivement.

$\bar{S}^p$ admet des développements analogues, avec $\bar{A}_h$ à la place de A_h.

Finalement, on obtient ceux de $G^p_{-\varepsilon} = f^*(1 - Y_{-\varepsilon})|u|^{p/2}$, $\varepsilon > 0$, à l'aide de ceux de $-\varepsilon^{p/2} H^0_{-\varepsilon}$, grâce à la formule $\frac{d}{d\varepsilon}(1-Y_{-\varepsilon}) = -\delta_{-\varepsilon}$,

$$G^p_{-\varepsilon} = \begin{cases} -\sum\limits_{h=0}^{\infty} (-1)^h A_h \dfrac{\varepsilon^{h+\frac{p}{2}+1}}{h+\frac{p}{2}+1} + (-1)^{h+\frac{n-2}{2}} B_h \dfrac{\varepsilon^{h+\frac{p+n}{2}}}{h+\frac{p+n}{2}} \left(\log\varepsilon - \dfrac{1}{h+\frac{p+n}{2}}\right) \\ \qquad + G^p \text{ , si } n \text{ est pair} \\ -\sum\limits_{h=0}^{\infty} (-1)^h A_h \dfrac{\varepsilon^{h+\frac{p}{2}+1}}{h+\frac{p}{2}+1} + G^p \text{ , si } n \text{ est impair .} \end{cases} \tag{15'}$$

$G^p_{-\varepsilon}$ admet également une partie finie que l'on note G^p.

Si Re $p > -2$ le symbole Pf est inutile et l'on a:

$$\begin{aligned} <S^p, \phi> &= \int_{\Omega_1} (x_n^2 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2)^{p/2} \phi(x)\,dx \\ <\bar{S}^p, \phi> &= \int_{\Omega_2} (x_n^2 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2)^{p/2} \phi(x)\,dx \\ <G^p, \phi> &= \int_{\Omega_3} |x_n^2 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2|^{p/2} \phi(x)\,dx \text{ ,} \end{aligned} \tag{16}$$

Ω_3 désignant l'extérieur du cône.

Plus généralement, posons $S^{p,m}_\varepsilon = f^*_+ Y_\varepsilon u^{p/2} \log^m u$. On a

$$u^{p/2} \log^m u = \left[\frac{d^m}{d\alpha^m} u^{(p/2+\alpha)}\right]_{\alpha=0}$$

d'où il s'ensuit

$$S^{p,m}_\varepsilon = \left[\frac{d^m}{d\alpha^m} S^{p+2\alpha}_\varepsilon\right]_{\alpha=0} \tag{17}$$

$S_\varepsilon^{p,m}$ a doric une partie infinie $I_\varepsilon^{p,m}$, déterminée à partir de celle de $S^{p+2\alpha}$ par dérivation m fois et l'on peut définir sa partie finie

$$S_\varepsilon^{p,m} = Pf\ S_\varepsilon^{p,m} = \lim_{\varepsilon\to 0} (S_\varepsilon^{p,m} - I_\varepsilon^{p,m}) \ .$$

De la même manière on peut définir les distributions $\bar{S}_\varepsilon^{p,m}$ et $G_{-\varepsilon}^{p,m}$, ceile-ci étant associée è la fonction $(1 - Y_{-\varepsilon})|u|^{p/2} \log^m |u|$ et leur partie finie.

2. LA DISTRIBUITION S^p COMME FONCTION DE LA VARIABLE p

D'après (1.15) il est clair que la distribution S^p, que nous noterons désormais $S(p)$, est une fonction de p à valeurs dans $(S)'$ (le dual de (S)), analytique dans le demi-plan Re $p > -2$.

Néanmoins, $S(p)$ peut avoir des pôles simples ou doubles dansle demi-plan Re $p \leq -2$, comme nous montrerons dans la suite.

Soit p_0 un nombre complexe tel que Re $p_0 < -2$, et considérons un cercle C de centre p_0 et de rayon ρ assez petit pour que C ne contienne aucun nombre exceptionnel autre que p_0. Posons $p = p_0 + 2\lambda$, h étant tel que $|\lambda| < \frac{\rho}{2}$. Si h # 0, p n'est jamais exceptionnel.

On a, par définition même de $S(p)$:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} |S(p) - S_\varepsilon(p) + I_\varepsilon(p)| = 0 \ ,$$

pour chaque p; où $S_\varepsilon(p)$ admet les développements (1.12) et $I_\varepsilon(p)$ est sa partie finie Posons

$$F_\varepsilon(p) = S_\varepsilon(p) - I_\varepsilon(p)$$

et plaçons-nous dans le cas où n est pair. Il est aisé de voir que la différence

$$S(p_0 + 2\lambda) - F_\varepsilon(p_0 + 2\lambda) = \sum_{]-\frac{p_0}{2} - 1[}^{\infty} A_h \frac{\varepsilon^{h+\frac{p_0}{2}+\lambda+1}}{h + \frac{p_0}{2}+\lambda+1} +$$

$$+ \sum_{]-\frac{p_0+n}{2}[}^{\infty} B_h \frac{\varepsilon^{h + \frac{p_0+n}{2} + \lambda}}{h + \frac{p_0+n}{2} + \lambda} \left(\log \varepsilon - \frac{1}{h + \frac{p_0+n}{2} + \lambda}\right),$$

où $]p[$ dénote le plus petit entier $\geq \mathrm{Re}\ p$, est majoré en module par

$$\left| \sum_{]-\frac{p_0}{2}[}^{\infty} A_h \frac{\varepsilon^{h + \frac{p_0}{2}}}{h + \frac{p_0}{2}} + \sum_{]-\frac{p_0+n}{2}[} B_h \frac{\varepsilon^{h + \frac{p_0+n}{2}}}{h + \frac{p_0+n}{2}} \left(\log \varepsilon - \frac{1}{h + \frac{p_0+n}{2}}\right) \right|$$

dont chaque terme tend vers 0, et ne dépend pas de λ. Cela prouve bien que $F_\varepsilon(p_0 + 2\lambda)$ converge uniformément à l'intérieur du cercle C, vers $S(p_0 + 2\lambda)$, quand $\varepsilon \to 0$.

D'autre part, $S_\varepsilon(p_0 + 2\lambda) = f^*_+ Y_\varepsilon u^{p_0/2+\lambda}$ est fonction holomorphe de λ dans C. Il en est de même de $I_\varepsilon(p_0 + 2\lambda)$, pourvu que p_0 ne soit pas exceptionnel.

Soit donc p_0 non-exceptionnel. Il résulte de ce qui précède, que la fonction $F_\varepsilon(p_0 + 2\lambda)$ est holomorphe à l'intérieur de C, pour chaque $\varepsilon > 0$, et en plus converge uniformément vers $S(p_0 + 2\lambda)$ quand $\varepsilon \to 0$. On en conclut, comme conséquence du théorème de Weierstrass, que la fonction $S(p_0 + 2\lambda)$ est aussi holomorphe dans le même domaine et qu'on peut la dériver terme à terme:

$$\frac{d^m}{d\lambda^m} F_\varepsilon(p_0 + 2\lambda) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \frac{d^m}{d\lambda^m} S(p_0 + 2\lambda) \qquad (m = 0,1,2,\ldots) \qquad (1)$$

$S(p_0 + 2\lambda)$ est, donc, développable en série de Taylor en tout point intérieur à C:

$$S(p_0 + 2\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} T^m(p_0) \frac{\lambda^m}{m!} \qquad (2)$$

avec $\mathcal{T}^m(p_0) = \lim\limits_{\lambda\to 0} \frac{d^m}{d\lambda^m} S(p_0 + 2\lambda)$.

Mais, compte tenu de (2.1), on a:

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{d^m}{d\lambda^m} S(p_0 + 2\lambda) = \lim_{\lambda\to 0} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{d^m}{d\lambda^m} F_\varepsilon(p_0 + 2\lambda) \tag{3}$$

Comme il est question ici d'un cas où l'on a le droit d'intervertir les opérations de limite, on trouve, donc

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{d^m}{d\lambda^m} S(p_0 + 2\lambda) = \lim_{\varepsilon\to 0} \left[S_\varepsilon(p_0, m) - I_\varepsilon(p_0, m)\right], \tag{4}$$

$$S_\varepsilon(p_0,m) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{d^m}{d\lambda^m} S_\varepsilon(p_0 + 2\lambda) = f_+^* Y_\varepsilon u^{p_0/2} \log^m u,$$

$$I_\varepsilon(p_0, m) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{d^m}{d\lambda^m} I_\varepsilon(p_0 + 2\lambda).$$

De (2.4) et du fait que $I(p_0,m)$ est une combinaison linéaire de fonctions du type $\varepsilon^\mu \log^\nu \varepsilon$, Re $\mu \leqslant 0$, $\nu \geqslant 0$, il résulte que $I_\varepsilon(p_0,m)$ est défini sans ambiguité comme la partie infinie de $S_\varepsilon(p_0,m)$ et par conséquent:

$$\mathcal{T}^m(p_0) = \lim_{0} \frac{d^m}{d\lambda^m} S(p_0 + 2\lambda) = Pf\, S_\varepsilon(p_0,m) = S(p_0,m) \tag{5}$$

On a, donc, le développement en série de Taylor

$$S(p_0 + 2\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} S(p_0,m) \frac{\lambda^m}{m!} \tag{6}$$

uniformément convergent à l'intérieur de C et dont les coefficients sont les distributions invariantes associées, au sens Methée, aux paires

$$(Pf\, Y_\varepsilon u^{p_0/2} \log^m u, \ 0).$$

On serait mené à la même conclusion si n était impair.

Examinons, maintenant, ce que se passe lorsque p_0 est exceptionnel. Il y a trois cas à distinguer:

a) $p = -2k$, n pair et $k \geqslant \frac{n-2}{2}$

b) $p = -2k$, n pair et $k < \frac{n-2}{2}$ ou n impair;

c) $p = -(n+2r)$, n impair

Considérons le premier cas. On voit que $I_\varepsilon(-2k+2\lambda)$ se compose d'une partie non holomorphe pour $\lambda=0$ et d'une autre, $J\ (-2k+2\lambda)$ holomorphe dans le cercle C, de centre -2k et rayon $\rho < -2$.

$$I_\varepsilon(-2k + 2\lambda) = - A_{k-1} \frac{\varepsilon^\lambda}{\lambda} - B_{k-\frac{n}{2}} \frac{\varepsilon^\lambda}{\lambda} (\log \varepsilon - \frac{1}{\lambda}) + J_\varepsilon(-2k + 2\lambda),$$

$$J_\varepsilon(-k+2\lambda) = - \sum_{h=0}^{k-2} A_h \frac{\varepsilon^{h-k+1+\lambda}}{h-k+1+\lambda} - \sum_{h=0}^{k-\frac{n}{2}-1} B_h \frac{\varepsilon^{h-k+\frac{n}{2}+\lambda}}{h-k+\frac{n}{2}+\lambda} (\log \varepsilon - \frac{1}{h-k+\frac{n}{2}-\lambda}) \tag{7}$$

La fonction $F_\varepsilon(-2k+2\lambda) = S_\varepsilon(-2k+2\lambda) - I_\varepsilon(-2k+2\lambda)$, $\varepsilon > 0$, est donc holomorphe dans le cercle C, privé de son centre. D'ailleurs, $F_\varepsilon(-2k + 2\lambda)$ n'y reste pas bornée. Cependant, si l'on ojoute à $F_\varepsilon(-2k + 2\lambda)$ les quantités $- A_{k-1} \frac{1}{\lambda} + B_{k-\frac{n}{2}} \frac{1}{\lambda^2}$, on obtient une fonction

$$G_\varepsilon(-2k + 2\lambda) = S_\varepsilon(-2k + 2\lambda) + A_{k-1} \frac{\varepsilon^\lambda - 1}{\lambda} + B_{k-\frac{n}{2}} \frac{\varepsilon^\lambda - 1}{\lambda} \log \varepsilon -$$

$$- B_{k-\frac{n}{2}} \frac{\varepsilon^\lambda - 1 + \lambda \log \varepsilon}{\lambda^2} - J_\varepsilon(-2k + 2\lambda) \tag{8}$$

dont le module est borné par une quantité fixe, lorsque $0 < \lambda < 1$. Il en résulte, selon the théorème de Riemann, que la fonction $G\ (-2k+2\lambda)$, $\varepsilon>0$, est aussi holomorphe pour $\lambda=0$.

Du reste, $G\ (-2k+2\lambda) = F_\varepsilon(-2k+2\lambda) - A_{k-1} \frac{1}{\lambda} + B_{k-\frac{n}{2}} \frac{1}{\lambda^2}$ converge uniformément vers $G(-2k+2\lambda) = S(-2k+2\lambda) - A_{k-1} \frac{1}{\lambda} + B_{k-\frac{n}{2}} \frac{1}{\lambda^2}$ lorsque $\varepsilon \to 0$, dans le cercle $|\lambda| < 1$. Il en résulte que $G_\varepsilon(-2k+2\lambda)$ est holomorphe dans le cercle $|\lambda| < 1$, et qu'on a, en plus:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{d^m}{d\lambda^m} G_\varepsilon(-2k+2\lambda) = \frac{d^m}{d\lambda^m} G(-2k+2\lambda) \tag{9}$$

$m = 0,1,2,\ldots$.

Passant à la limite, pour $\lambda\to 0$, on obtient:

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{d^m}{d\lambda^m} G(-2k+2\lambda) = \lim_{\lambda\to 0} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{d^m}{d\lambda^m} G_\varepsilon(-2k+2\lambda) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{\lambda\to 0} \{ \frac{d^m}{d\lambda^m} S_\varepsilon(-2k+2\lambda) + \frac{d^m}{d\lambda^m} \frac{\varepsilon^\lambda-1}{\lambda} A_{k-1} + \frac{d^m}{d\lambda^m} \frac{\varepsilon^\lambda-1}{\lambda} \log \varepsilon \, B_{k-\frac{n}{2}} -$$

$$- \frac{d^m}{d\lambda^m} \frac{\varepsilon^\lambda - 1 + \lambda \log \varepsilon}{\lambda^2} B_{k-\frac{n}{2}} - \frac{d^m}{d\lambda^m} J_\varepsilon(-2k+2\lambda) \} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \Big\{ S_\varepsilon(-2k,m) + \frac{\log^{m+1}\varepsilon}{m+1} A_{k-1} + \frac{\log^{m+2}\varepsilon}{m+1} B_{k-\frac{n}{2}} +$$

$$+ \frac{m!}{(m+2)!} \log^{m+2}\varepsilon \; B_{k-\frac{n}{2}} - J_\varepsilon(-2k,m) \Big\} . \tag{10}$$

compte tenu de

$$\lim_{h \to 0} \frac{d^m}{d\lambda^m} \frac{\varepsilon^\lambda-1}{A} = \frac{\log^{m+1}}{m}$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{d^m}{d\lambda^m} \frac{\varepsilon^\lambda - 1 - \lambda \log \varepsilon}{\lambda^2} = \frac{m!}{(m+2)!} \log^{m+2}\varepsilon$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{d^m}{d\lambda^m} S_\varepsilon(-2k + 2\lambda) = S_\varepsilon(-2k,m)$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{d^m}{d\lambda^m} J_\varepsilon(-2k + 2\lambda) = J_\varepsilon(-2k,m)$$

En répétant le raisonnement que nous avons fait pour le cas précédent, on est mené à

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{d^m}{d\lambda^m} \{S(-2k + 2\lambda) - A_{k-1} \frac{1}{\lambda} B_{k-\frac{n}{2}} \frac{1}{\lambda^2} \} = S(-2k,m) \tag{11}$$

D'autre part, la fonction $S(-2k+2\lambda) - A_{k-1}\frac{1}{\lambda} + B_{k-\frac{n}{2}}\frac{1}{\lambda^2}$, étant holomorphe dans $|\lambda| < 1$, y est développable en série de Taylor:

$$S(-2k + 2\lambda) - A_{k-1}\frac{1}{\lambda} + B_{k-\frac{n}{2}}\frac{1}{\lambda^2} = \sum_{m=0}^{\infty} T^m(-2k)\frac{\lambda^m}{m!} \qquad (12)$$

Il s'ensuit de (2.11) que $T^m(-2k) = S(-2k,m)$, c'est-à-dire $T^m(-2k)$ est la distribution associée à la paire $(Pf\ Y\ u^{-k}\log^m u,\ 0)$.

Donc, la fonction $S(p)$ admet, au voisinage de $p=-2k$, le dévelop-ment en série de Laurent suivant:

$$S(-2k+2\lambda) = -B_{k-\frac{n}{2}}\lambda^{-2} + A_{k-1}\lambda^{-1} + \sum_{m=0}^{\infty} S(-2k,m)\frac{\lambda^m}{m!}, \qquad (13)$$

si n est pair et si $k \geqslant \frac{n}{2}$. Ainsi, $p=-2k$ est à la fois un pôle simple et double pour $S(p)$.

Soit maintenant le deuxième cas. Il est aisé de voir que $I(-2k-2\lambda)$ ne contient pas des termes en $B_{k-\frac{n}{2}}$; par conséquent, un raisonnement analogue au précédent mènerait au développement suivant:

$$S(-2k + 2\lambda) = A_{k-1}\lambda^{-1} + \sum_{m=0}^{\infty} S(-2k,m)\frac{\lambda^m}{m!}, \qquad (14)$$

si n est pair et $k < \frac{n}{2}$ ou si n est impair.

Enfim, dans le troisième cas, on trouve le développementen série de Laurent de $S(-n-2r+2\lambda)$, n impair, valable dans

$$S(-n-2r+2\lambda) = B_r\lambda^{-1} + \sum_{m=0}^{\infty} S(-n-2r,m)\frac{\lambda^m}{m!}, \qquad (15)$$

si n est impair.

D'une manière analogue on obtient pour les fonctions $\bar{S}(p)$ et $G(p)$ les développernents suivants, valables dans un voisinagesuffisamment petit de $\lambda=0$:

$$\bar{S}(p + 2\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} S(p,m) \frac{\lambda^m}{m!} \qquad (6')$$

si p est non exceptionnel.

$$\bar{S}(-2k + 2\lambda) = - B_{k-\frac{n}{2}} \lambda^{-2} + \bar{A}_{k-1} \lambda^{-1} + \sum_{m=0}^{\infty} \bar{S}(-2k,m) \frac{\lambda^m}{m!} \qquad (13')$$

si n est pair et $k > \frac{n}{2}$

$$\bar{S}(-2k + 2\lambda) = \bar{A}_{k-1} \lambda^{-1} + \sum_{m=0}^{\infty} \bar{S}(-2k , m) \frac{\lambda^m}{m!} \qquad (14')$$

si n est pair et $k \leqslant \frac{n}{2}$.

$$\bar{S}(-n-2r+2\lambda) = B_r \lambda^{-1} + \sum_{m=0}^{\infty} \bar{S}(-n-2r,m) \frac{\lambda^m}{m!} . \qquad (15')$$

si p est impair

$$G(p + 2\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} G(p,m) \frac{\lambda^m}{m!} , \; p \neq -2k, \; -n-2r , \qquad (6'')$$

$$G(-2k+2\lambda) = - (-1)^{k-1} B_{k-\frac{n}{2}} \lambda^{-2} + (-1)^{k-1} A_{k-1} \lambda^{-1} +$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} G(-2k,m) \frac{\lambda^m}{m!} \qquad (13'')$$

si n est pair et $k \geqslant \frac{n}{2}$.

$$(\quad 2 + 2\lambda) = (-1)^{k-1} A \quad \lambda^{-1} + {}_{m=0} \; G(-2k,m) \frac{\lambda^m}{m!} \qquad (14'')$$

si n est pair et $k < \frac{n}{2}$, ou bien si n est impair.

$$G(-n-2r+2\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} G(-n-2r,m) \frac{\lambda^m}{m!} , \qquad (15'')$$

si n est impair.

3. LES TRANSFORMÉES DE FOURIER DES Z_p

Retournons à la distribution de Riesz-Schwartz qui, dans la nouvelle notation s'écrit

$$Z_{n+p} = \frac{1}{2^{n+p-1}\,\pi^{\frac{n-2}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n+p}{2}\right)\,\Gamma\left(\frac{p+2}{2}\right)}\, s(p) \;,$$

non exceptionnel.

$$\begin{aligned} Z_{n-2} &= \lim_{\lambda \to 0} Z_{n-2k+2\lambda} \;, \quad k = 1,2,\ldots \\ Z_{-2r} &= \lim_{\lambda \to 0} Z_{-2r+2\lambda} \;, \quad r = 0,1,2,\ldots \end{aligned} \tag{1}$$

Pour avoir donc explicitement Z_{n-2k} et Z_{-2r} il suffit de calculer le premier terme du développement de $Z_{n-2k+2\lambda}$ et $Z_{-2r+2\lambda}$ en séries de Taylor au voisinage de $\lambda=0$, ce qu'on obtient en multipliant, selon la règle de Cauchy, les développements de chaque fonction de h, interuenant dans la définition de $Z_{n-2k+2\lambda}$ et $Z_{-2r+2\lambda}$.

Les fonctions $1/\Gamma(z)$ sont des fonctions holomorphes entières de Z. Au voisinage de $z_0 \neq -r$, $r = 0,1,2,\ldots$, on a le développement de Taylor suivant

$$\frac{1}{\Gamma(z_0)\lambda} = \frac{1}{\Gamma(z_0)}\left(1 - \psi(z_0) + \left[\psi^2(z_0) - \psi'(z_0)\right]\frac{\lambda^2}{2!} - \ldots\right), \tag{2}$$

$\psi(z) = \frac{d}{dz}\log\Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$. Si $z_0 = -r$, on obtient, à l'aide de la formule

$$\Gamma(-r+\lambda)\,\Gamma(1+r-\lambda) = (-1)^r\,\pi\,\sin\pi\lambda\,,$$

le développement

$$\frac{1}{\Gamma(-r+\lambda)} = (-1)^r\, r!\,(\lambda - \psi(r+1)\,\lambda^2 + \ldots) \tag{3}$$

$$\psi(1) = -\gamma\,, \quad \psi(m) = -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m-1}\,, \quad m = 1,2,\ldots\;.$$

La fonction $2^{-2\lambda}$ étant, aussi, holomorphe, on a

$$2^{-2\lambda} = 1 - (2 \log 2)\lambda + (4 \log 2) \frac{h^2}{2} - \ldots \tag{4}$$

En tenant compte de (2.14) et (3.1,2,3,4), on obtient comme premier terme du développement de $Z_{n-2k+2\lambda}$:

$$\frac{(-1)^{k-1} \quad (k-1)!}{2^{n-2k-1} \, \pi^{\frac{n-2}{2}} \, \Gamma(\frac{n-2k}{2})} A_{k-1}$$

d'où l'on tire, sachant que $(-1)^{k-1} (k-1)! \, A_{k-1} = H^{k-1}$:

$$Z_{n-2k} = \frac{1}{2^{n-2k-1} \, \pi^{\frac{n-2k}{2}} \, \Gamma(\frac{n-2k}{2})} H^{k-1} \tag{5}$$

pour $k = 1,2,\ldots, \frac{n-2}{2}$ si n est pair et $k = 1,2,\ldots,$ si n est impair.

De la même manière, on obtient le premier terme de $Z_{-2r+2\lambda}$

$$Z_{-2r} = \frac{(-1)^r \, r! \, (-1)^{\frac{n}{2}+r} \quad (n/2 + r - 1)!}{2^{-2r-1} \quad \pi^{\frac{n-2}{2}}} B_r \, , \tag{6}$$

si n est pair

$$Z_{-2r} = \frac{(-1)^{r-1} \quad r!}{2^{-2r-1} \, \pi^{\frac{n-2}{2}} \, \Gamma(\frac{2-n-2r}{2})} B_r \tag{6}$$

si n est impair.

Il en résulte, par (1.13) que

$$Z_{-2r} = \square^r \, \delta_0 \tag{6'}$$

La transformée de Fourier de Z_q, pour Re $q \leq 0$, s'est trouvée égale à

$$F Z_q = (\frac{1}{2\pi})^q \left[\exp(-i\pi \frac{q}{2})\, S(-q) + \exp(+i\pi \frac{q}{2})\, \bar{S}(-q) + G(-q)\right] \quad (7)$$

$S(p)$, $\bar{S}(p)$ et $G(p)$ étant des fonctions analytiques de p, pour $p \neq -2k$, $-n-2r$, cette formule est encore valable pour Re $q > 0$, à l'exception de $q = 2k$, $n+2r$.

Pour avoir $F Z_{2k}$ et $F Z_{n+2r}$ nous n'avons qu'à calculer le premier terme dans les développenents en série de Taylor des fonctions $FZ_{2k+2\lambda}$ et $F Z_{n+2r+2\lambda}$.

$F Z_{2k+2\lambda}$ se présente comme la somme de trois fonctions de λ:

$$F(\lambda) = (\frac{1}{2\pi})^{2k+2\lambda} \exp[- i\pi(k+\lambda)]\; S(-2k-2\lambda)$$

$$\bar{F}(\lambda) = (\frac{1}{2\pi})^{2k+2\lambda} \exp[+ i\pi(k+\lambda)]\; \bar{S}(-2k-2\lambda)$$

$$F(\lambda) = (\frac{1}{2\pi})^{2k+2\lambda} G(-2k-2\lambda)$$

dont les valeurs sont des distributions ayant pour support les ensembles fermés $\bar{\Omega}_1$, $\bar{\Omega}_2$ et $\bar{\Omega}_3$, respectivement. En développant chacune des ces fonctions en série de Laurent, au voisinage de $\lambda=0$, à l'aide de

$$(\frac{1}{2\pi})^{2k+2\lambda} = (\frac{1}{2\pi})^{2k} \left[1 - 2 \log (2\pi)\lambda + 4 \log^2 (2\pi) \frac{\lambda^2}{2} - \dots\right] \quad (8)$$

et de

$$\exp (\mp i\pi(k+\lambda)) = (-1)^k\left[1 \mp i\pi - \pi^2 \frac{\lambda^2}{2} \pm \dots\right] , \quad (9)$$

on obtient, pour n pair et $k \geq \frac{n}{2}$

$$\begin{aligned} F(\lambda) = (\frac{1}{2\pi})^{2k} \{ & (-1)^{k-1} B_{k-\frac{n}{2}} \lambda^{-2} + \\ & + \left[(-1)^{k-1} A_{k-1} + (-1)^k(2 \log (2\pi) + i\pi)\; B_{k-\frac{n}{2}}\right] \lambda^{-1} + \\ & + (-1)^k S(-2k) + (-1)^k (2 \log (2\pi) + i\pi)\, A_{k-1} + \\ & + (-1)^{k-1} \frac{(2 \log (2\pi) + i\pi)^2}{2} B_{k-\frac{n}{2}} + 0(\lambda)\} , \end{aligned} \quad (10)$$

$$\bar{F}(\lambda) = (\frac{1}{2\pi})^{2k}\{(-1)^{k-1} \quad B_{k-\frac{n}{2}}\,\lambda^{-2} +$$

$$+ \left[(-1)^{k-1}\,\bar{A}_{k-1} + (-1)^{k}(2 \log (2\pi) - i\pi)\,B_{k-\frac{n}{2}}\right] \lambda^{-1} +$$

$$+ (-1)^{k}\,\bar{S}(-2k) + (-1)^{k}\,(2 \log (2\pi) - i\pi) \quad \bar{A}_{k-1} +$$

$$+ (-1)^{k-1}\,\frac{(2 \log (2n) - i\pi)^{2}}{2} \quad B_{k-\frac{n}{2}} + 0(\lambda)\}, \tag{10'}$$

$$F(\lambda) = (\frac{1}{2\pi})^{2k}\{(-1)^{k} \quad B_{k-\frac{n}{2}}\,\lambda^{-2} +$$

$$+ \left[(-1)^{k} \quad A_{k-1} + (-1)^{k-1}\, 2 \log (2\pi)\, B_{k-\frac{n}{2}}\right] \lambda^{-1} +$$

$$+ G(-2k) + 2 \log (2\pi)\,(-1)^{k-1}\,A_{k-1} - (-1)^{k-1}\,B_{k-\frac{n}{2}} + 0(\lambda)\}. \tag{10''}$$

On voit que chaque fonction comporte séparément des singularités en A ayant pour support la surface du cône d'ondes, mais elles sont supprimées dans la fonction $F\,Z_{2k+2\lambda}$, la somme des termes infinis étant nulle, en vertu des relations

$$A_{h} + \bar{A}_{h} = A_{h}, \qquad \bar{B}_{h} = B_{h}, \qquad 2B_{h} = B_{h}$$

On a donc le résultat suivant

$$F\,Z_{2k} = (\frac{1}{2\pi})^{2k}\{(-1)^{k}\left[S(-2k) + \bar{S}(-2k)\right]$$

$$+ G(-2k) + (-1)^{k}\,i\pi\,(A_{k-1} - \bar{A}_{k-1}) + (-1)^{k}\,\pi^{2}\,B_{k-\frac{n}{2}}\}. \tag{11}$$

si n est pair et $k \geq \frac{n}{2}$.

Un calcul semblable donne, compte tenu de (2.14), (3.8) et (3.9):

$$F Z_{2k} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{2k} \{ (-1)^k \left[S(-2k) + \bar{S}(-2k) \right]$$

$$+ G(-2k) + (-1)^k \, i n \, (A_{k-1} - \bar{A}_{k-1}) \} , \qquad (12)$$

si n est pair et $k < \frac{n}{2}$ ou si n est impair.

En développant la fonction $F Z_{n+2r+2\lambda}$, n impair, on trouve

$$\left.\begin{aligned}
F(\lambda) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+2r} (-1)^{\frac{n+1}{2}+r} \, i\left[- B_r \frac{1}{\lambda} + S(-n-2r)\right. \\
&\quad \left. + (2 \log (2\pi) + i\pi) B_r + 0(\lambda)\right] \\
\bar{F}(\lambda) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+2r} (-1)^{\frac{n+1}{2}+r} (-i) \left[- B_r \frac{1}{\lambda} + \bar{S}(-n-2r)\right. \\
&\quad \left. + (2 \log (2\pi) - i\pi) B_r + 0(\lambda)\right] \\
F(\lambda) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+2r} \left[G(-n-2r) + 0(\lambda)\right]
\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

d'où il résulte

$$F Z_{n+2r} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+2r} \{ (-1)^{\frac{n+2r+1}{2}} i\left[S(-n-2r) - \bar{S}(-n-2r)\right]$$

$$+ G(-n-2r) + (-1)^{\frac{n+2r-1}{2}} . \, 2\pi \, B_r \} \qquad (14)$$

si n est impair

Il est convenable d'écrire ces résultats en termes des H^k et des dalembertiens itérés de δ_0 à l'aide des relations (1.12) et (1.13). Nous adoptons dès maintenant la notation suivante:

$$P(p) = \exp\left(\frac{i\pi p}{2}\right) S(p) + \exp\left(- \frac{i\pi p}{2}\right) \bar{S}(p) + G(p) ,$$

$$P_{\pm}(p) = \exp\left(\frac{i\pi p}{2}\right) S(p) \pm \exp\left(- \frac{i\pi p}{2}\right) \bar{S}(p) ,$$

pour tout p complexe.

$$S_{\pm}(p) = S(p) \pm \bar{S}(p) \ , \quad H^k_{\pm} = H^k \pm \bar{H}^k \quad , \ P_{\pm}(2m) = (-1)^m \ S_{\pm}(2m) \ ,$$

$$P_{\pm}(2m+1) = i.(-1)^m \ S_{\mp}(2m+1) \ , \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$F Z_{2k} = (\frac{1}{2\pi})^{2k} \left\{ P(-2k) - \frac{i\pi}{(k-1)!} (H^{k-1} - \bar{H}^{k-1}) + \frac{(-1)^{k-\frac{n}{2}} \pi^{\frac{n+2}{2}} \Box^{k-\frac{n}{2}} \delta_0}{2^{2k-n+1} (k-1)! \ (k - \frac{n}{2})!} \right\} \tag{15}$$

si n est pair et $k > \frac{n-2}{2}$.

$$F Z_{2k} = (\frac{1}{2\pi})^{2k} \{P(-2k) - \frac{i\pi}{(k-1)!} (H^{k-1} - \bar{H}^{k-1})\} \tag{16}$$

si n est pair et $k \leq \frac{n-2}{2}$ ou si n est impair.

$$F Z_{n+2r} = (\frac{1}{2\pi})^{n+2r} \ P(-n-2r) + G(-n-2r) + (-1)^r \ \frac{\pi^{\frac{n+2}{2}} \Box^r \delta_0}{2^{2r} \ r! \ \Gamma(\frac{n+2r}{2})} \tag{17}$$

si n est *impair*

Soit $\bar{Z}_4$ la transformée de Z_4 par une inversion du temps. L'image de Fourier de $\bar{Z}_4$ s'obtient tout simplement, en replaçant dans $F Z_q$, les S et les H par les $\bar{S}$ et les $\bar{H}$, respectivement, en vertu de la propriété de la transformation de Fourier:

$$F\bar{Z}_q = \bar{F} Z_q = \overline{F Z_q} \tag{18}$$

Pour q non exceptionnel on a

$$F \bar{Z}_q = (\frac{1}{2\pi})^q \ \{ \exp(+ \frac{i\pi q}{2}) \ S(-q) + \exp(- \frac{i\pi q}{2}) \ \bar{S}(-q) + G(-q)\} \tag{19}$$

4. LES TRANSFORMÉES DE FOURIER DE S(p, m) et H^k

La connaissance des images de Fourier des Z_{n+p} permet d'obtenir immédiatement celles de $S(p)$, pour les valeurs non exceptionnels de p, en vertu de la formule (3.1). Les relations (3.5) et (3.6) donnent également les images de Fourier de H^k (pour n pair et $k < \frac{n-2}{2}$ ou n impair) et de B_r. Néanmoins, on ne connaît pas des relations entre Z_q et H^k, si n est pair et $k \geq \frac{n-2}{2}$ qu'on puisse utiliser pour calculer

$$F H^{\frac{n-2}{2}}, F H^{\frac{n}{2}}, \ldots$$

On peut, toutefois, obtenir les images de Fourier de H^k, quels que soient k et n, aussi bien que celles de $S(p,m)$, $m = 0,1,2,\ldots$ à partir de l'expression de $FS(p)$ déduite de (3.1) par application de la trônsforrnation de Fourier:

$$F\, S(p) = \pi^{\frac{n-2}{2}} 2^{n+p-1}\, \Gamma\left(\frac{n+p}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p+2}{2}\right) F Z_{n+p}, \tag{1}$$

$p \neq -2k$, $-(n+2r)$, $k = 1,2,\ldots$, $r = 0,1,2,\ldots$.

En tenant cornpte des résultats de la section précédente, on peut écrire:

$$F\, S(p) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+p}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p+2}{2}\right)}{2\, \pi^{\frac{n}{2}+p+1}} \left\{ \exp\left[-\frac{i\pi(n+p)}{2}\right] S(-n-p) + \right.$$

$$\left. + \exp\left[+\frac{i\pi(n+p)}{2}\right] \bar{S}(-n-p) + G(-n-p) \right\}, \tag{2}$$

pour p et $-n-p$ non exceptionnels.

Rappelons que, si p n'est pas exceptionnel, $S(p+2\lambda)$ est développable en série de Taylor uniformément convergente dans un voisinage assez petit de p:

$$S(p+2\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} S(p,m) \frac{\lambda^m}{m!}$$

Il est de même de son image de Fourier:

$$FS(p+2\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} FS(p,m)\,\frac{\lambda^m}{m!} \tag{3}$$

en vertu de la continuité de la transformation de Fourier.

Par conséquent, on peut obtenir $FS(p,m)$, m = 0,1,2,..., tout simplement en évaluant les coefficients du développement de $FS(p+2\lambda)$ en puissances de A, à partir de la formule (4.2). Notons que $FS(p+2\lambda)$ est la somme de trois distributions ayant pour support, respectivement, $\bar{\Omega}_1$, $\bar{\Omega}_2$ et $\bar{\Omega}_3$, dont, chacune est le produit de certaines fonctions de h, toutes développables par séries de Taylor ou de Laurent. Par multiplication, terme à terme, de ces séries, on aboutit au développement de $FS(p+2\lambda)$. Si p n'est pas exceptionnel, on a:

$$\begin{aligned}
&\text{a)}\quad \Gamma\left(\tfrac{n+p}{2}+\lambda\right) = \Gamma\left(\tfrac{n+p}{2}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_j\left(\tfrac{n+p}{2}\right)\lambda^j\\
&\text{b)}\quad \Gamma\left(\tfrac{2+p}{2}+\lambda = \Gamma\left(\tfrac{2+p}{2}\right)\sum_{h=0}^{\infty}\alpha_h\left(\tfrac{2+p}{2}\right)\lambda^h\\
&\text{c)}\quad \frac{1}{2}\pi^{\frac{n-p-1-2}{2}} = \frac{1}{2}\pi^{-\frac{n}{2}-p-1}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(-2\log\pi)^\ell}{a!}\\
&\text{d)}\quad \exp\left[\mp i\pi\left(\tfrac{n+p}{2}+\lambda\right)\right] = \exp\left[\mp i\pi\left(\tfrac{n+p}{2}\right)\right]\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(\mp i\pi)^s}{s!}
\end{aligned} \tag{4}$$

et pour $n+p$ non exceptionnel, on a:

$$\text{e)}\ S(-n-p-2\lambda) = \sum_{t=0}^{\infty}(-1)^t\, S(-n-p,t)\frac{\lambda^t}{t!}$$

$$\text{f)}\ G(-n-p-2\lambda) = \sum_{t=0}^{\infty}(-1)^t\, G(-n-p,t)\frac{\lambda^t}{t!}$$

où $\alpha_j(z_0)$, $j = 0,1,2,\ldots$, dénote

$$\frac{1}{j!\,\Gamma(z_0)}\lim_{z\to z_0}\frac{d^j}{dz^j}\Gamma(z),$$

$\alpha_0(z_0) = 1$, $\alpha_1(z_0) = \psi(z_0)$, $\alpha_2(z_0) = \frac{1}{2}\left[\psi^2(z_0) + \psi'(z_0)\right]$, ...

Si l'on pose $S(p,m) = T(p,m) + \bar{T}(p,m) + \dot{T}(p,m)$, $\frac{T(p,m)}{m!}$, $\frac{\bar{T}(p,m)}{m!}$ et $\frac{\dot{T}(p,m)}{m!}$ étant les coefficients de λ^m dans les trois séries qui composent celle de $FS(p+2\lambda)$ et ayant pour support $\bar{\Omega}_1$, $\bar{\Omega}_2$ et $\bar{\Omega}_3$, respectivement, on trouve

$$\frac{T(p,m)}{m!} = \exp\left(-i\pi\left(\frac{n+p}{2}\right)\right) \frac{\Gamma\left(\frac{n+p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2+p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{n}{2}+p+1}} \sum_{t=0}^{m} \frac{(-1)^t}{t!} a_t^m \, S(-n-p,t)$$

$$\frac{\bar{T}(p,m)}{m!} = \exp\left(+i\pi\left(\frac{n+p}{2}\right)\right) \frac{\Gamma\left(\frac{n+p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2+p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{n}{2}+p+1}} \sum_{t=0}^{m} \frac{(-1)^t}{t!} \overline{a_t^m} \, \bar{S}(-n-p,t)$$

$$\frac{\dot{T}(p,m)}{m!} = \frac{\Gamma\left(\frac{n+p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2+p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{n}{2}+p+1}} \sum_{t=0}^{m} \frac{(-1)^t}{t!} a_t^m \, G(-n-p,t)$$

avec

$$a_t^m = \sum_{\substack{j,h,\ell,s \geq 0 \\ [j+h+\ell+s = m-t]}} \frac{\alpha_j\left(\frac{n+p}{2}\right)\alpha_h\left(\frac{2+p}{2}\right)(-2\log\pi)^\ell(-i\pi)^s}{\ell!\, s!} \tag{6}$$

$\overline{a_t^m}$ étant obtenu de a_t^m par passage de $-i\pi$ à $+i\pi$,

$$a_t^m = \sum_{\substack{j,h,\ell \geq 0 \\ [j+h+\ell = m-t]}} \frac{\alpha_j\left(\frac{n+p}{2}\right)\alpha_h\left(\frac{2+p}{2}\right)(-2\log\pi)^\ell}{\ell!} \tag{7}$$

Dans l'expression de ces coefficients, la somme des indices doit être égale à $m-t$, ce qui est indiqué par le crochet.

Posons

$$a_t^m = a_t^m + b_t^m - i\, c_t^m, \qquad \overline{a_t^m} = a_t^m + b_t^m + i\, c_t^m, \tag{8}$$

$$b_t^m = \sum_{\substack{j,h,\ell \geq 0 \\ [j+h+\ell = m-t]}} \frac{\alpha_j(\frac{n+p}{2})\ \alpha_h(\frac{2+p}{2})\ (-2\ \log \pi)^\ell\ (-1)^{u+1}\ \pi^{2u+2}}{\ell!\ (2u+2)!} \tag{9}$$

$$c_t^m = \sum_{\substack{j,h,\ell,u \geq 0 \\ [j+h+\ell+2u+1 = m-t]}} \frac{\alpha_j(\frac{n+p}{2})\ \alpha_h(\frac{2+p}{2})\ (-2\ \log \pi)^\ell (-1)^u\ \pi^{2u+1}}{\ell!\ (2u+1)!} \tag{10}$$

On a, donc,

$$\frac{FS(p,m)}{m!} = \frac{\Gamma(\frac{n+p}{2})\ \Gamma(\frac{2+p}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}+p+1}} \sum_{t=0}^{m} \frac{(-1)^t}{t!} \{ a_t^m\ P(-n-p,t) + b_t^m\ P_+(-n-p,t)$$

$$- i\ c_t^m\ P_-(-n-p,t) \} \tag{11}$$

Cette expression, qui généralise la formule (4.2), donne, en particulier, pour $m=1$:

$$FS(p,1) = \frac{\Gamma(\frac{n+p}{2})\ \Gamma(\frac{2+p}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}+p+1}} \{ [\psi(\frac{n+p}{2}) + \psi(\frac{2+p}{2}) - 2 \log \pi]\ P(-n-p)$$

$$+ P(-n-p,1) - i\pi\ P_-(-n-p) \} \tag{12}$$

Il est utile de noter que les coefficients a_t^m, b_t^m et c_t^m ne dépendent que de la différence $m-t$: on a toujours $a_t^m = a_{t-1}^{m-1} = a_{t-2}^{m-2} = \ldots$.

Cas exceptionnels

La formule (1.10) n'est valable que si p et $-(n+p)$ sont à la fois non exceptionnels. Si l'un ou l'autre son exceptionnels, alors au moins une des séries de Taylor (4.4) doit être remplacée par une série de Laurent.

Nous nous occuperons, d'abord, du cas où $-(n+p)$ est exceptionnel, sans que p lui-même le soit. Cela se produit lorsque $p = 2k - n$, n impair, et lorsque $p = 2r$, n pair ou impair, $k = 1,2,\ldots$, $r = 0,1,\ldots$

a) Soit $p = 2k - n$, n impair. On a

$$S(-n-p-2\lambda) = S(-2k-2\lambda) = A_{k-1}\,\lambda^{-1} + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-1)^t}{t!}\, S(-2k,t)\lambda^t$$

$$G(-n-p-2\lambda) = G(-2k-2\lambda) = (-1)^k A_{k-1}\,\lambda^{-1} + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-1)^t}{t!}\, G(-2k,t)\,\lambda^t$$

tous les autres développements restant inchangés. D'autre part,

$$\exp(\mp i\pi(\tfrac{n+p}{2})) \quad \text{devient} \quad \exp(\mp ink) = (-1)^k .$$

Il en résulte que $T(2k-n,m)$ aura un terme supplémentaire en A_{k-1}:

$$\frac{T(2k-n,m)}{m!} = \frac{(-1)^k\,(k-1)!\,\Gamma(\frac{2+2k-n}{2})}{2\pi^{2k-\frac{n}{2}+1}} \left\{ -a_{-1}^m A_{k-1} + \sum_{t=0}^{m} \frac{(-1)^t}{t!}\, a_t^m\, S(-2k,t)\,\lambda^t \right\}, \quad a_{-1}^m = a_0^{m+1}$$

d'où il s'ensuit, compte tenu de (3.12) et (4.8),

$$\frac{FS(2k-n,m)}{m!} = \frac{(k-1)!\,\Gamma(\frac{2+2k-n}{2})}{2\pi^{2k-\frac{n}{2}+1}} \left\{ b_{-1}^m (-1)^{k-1} (A_{k-1} + \bar{A}_{k-1}) - i\,c_{-1}^m (-1)^{k-1} (A_{k-1} - \bar{A}_{k-1}) + \sum_{t=0}^{m} \frac{(-1)^t}{t!} \left[a_t^m P(-2k,t) + b_t^m P_+(-2k,t) - i\,c_t^m P_-(-2k,t) \right] \right\} \tag{13}$$

On note que dans cette formule la constante a^m_{-1} ne figure pas. Cela se doit au fait que a^m_{-1} est le coefficient de la distribution

$$A_{k-1} + \bar{A}_{k-1} - A_{k-1} \quad ,$$

qui est nulle.

A l'aide de (1.12), (4.13) s'écrit

$$\frac{FS(2k-n,m)}{m!} = \frac{(k-1)!\ \Gamma(\frac{2+2k-n}{2})}{2\ \pi^{2k-\frac{n}{2}+1}} \left\{ \frac{b^m_{-1}}{(k-1)!} H^{k-1}_{+} - i\, \frac{c^m_{-1}}{(k-1)!} H^{k-1}_{-} \right.$$

$$\left. + \sum_{t=0}^{m} \frac{(-1)^t}{t!} \left[a^m_t P(-2k,t) + b^m_t P_{+}(-2k,t) - i\, c^m_t P_{-}(-2k,t) \right] \right\} \tag{14}$$

Pour $m=0$ et $m=1$ les coefficients a^m_t, b^m_t et c^m_t son égaux à

$$a^0_0 = a^1_1 = \alpha_0(z_0) = 1 \ ,$$

$$a^1_0 = \alpha_1(k) + \alpha_1(\frac{2+2k-n}{2}) - 2 \log \pi = \psi(k) + \psi(\frac{2+2k-n}{2}) - 2 \log \pi = \xi(\frac{2k-n}{2}),$$

$$a^1_{-} = \alpha_2(k) + \alpha_2(\frac{2+2k-n}{2}) + (\frac{-2 \log \pi)^2}{2}) + \alpha_1(k)\ \alpha_1(\frac{2+2k-n}{2})$$

$$- 2 \log \pi[\alpha_1(k) + \alpha_1(\frac{2+2k-n}{2})] = \xi^2(\frac{2k-n}{2}) + \xi'(\frac{2k-n}{2}) \ , \ \ldots$$

$$b^0_0 = b^1_1 = 0 \ , \qquad b^0_{-1} = b^1_0 = 0 \ , \qquad b^1_{-1} = -\frac{\pi^2}{2} \ , \ \ldots$$

$$c^0_0 = c^1_1 = 0 \ , \qquad c^0_{-1} = c^1_0 = \pi, \qquad c^1_{-1} = \pi\xi(\frac{2k-n}{2}) \ , \ \ldots$$

où $\xi(\frac{p}{2})$ désigne la fonstion $\psi(\frac{n+p}{2}) + \psi(\frac{2+p}{2}) - 2 \log \pi$. Cela nous donne

$$FS(2k-n) = \frac{(k-1)!\ \Gamma(\frac{2+2k-n}{2})}{2\pi^{2k-n+1}} \left\{ - \frac{i\pi}{(k-1)!} H^{k-1}_{-} + P(-2k) \right\} \tag{15}$$

et

$$FS(2k-n,1) = \frac{(k-1)!\ \Gamma(\frac{2+2k-n}{2})}{2\ \pi^{2k-n+1}} \left\{ -\frac{\pi^2}{2(k-1)!} H_+^{k-1} - \frac{i\pi}{(k-1)!} \xi(\frac{2k-n}{2}) H_-^{k-1} \right.$$

$$\left. + \xi(\frac{2k-n}{2}) P(-2k) - P(-2k,1) - i\pi\ P(-2k) \right\} \tag{16}$$

b) $p = 2r$. Dans ce cas (4.4 - e,e') devront être remplacés, respectivement, par:

$$S(-n-2r-2\lambda) = -B_r\ \lambda^{-2} - A_{\frac{n}{2}+r-1}\ \lambda^{-1} + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-1)^t}{t!} S(-n-2r,t)\ \lambda^t$$

$$G(-n-2r-2\lambda) = (-1)^{\frac{n}{2}+r} B_r\ \lambda^{-2} + (-1)^{\frac{n}{2}+r} A_{\frac{n}{2}+r-1}\ \lambda^{-1} +$$

$$+ \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-1)^t}{t!} G(-n-2r,t)\ \lambda^t \quad ,$$

si n est pair, et par

$$S(-n-2r-2\lambda) = -B_r\ \lambda^{-1} + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-1)^t}{t!} S(-n-2r,t)\ \lambda^t$$

$$G(-n-2r-2\lambda) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-1)^t}{t!} G(-n-2r,t)\ \lambda^t$$

si n est impair.

Dans le cas n pair, $T(2r,m)$ (resp. $\bar{T}(2r,m)$, $T(2r,m)$) aura des termes supplémentaires, proportionnels à B_r (resp. B_r, B_r) et à $A_{\frac{n}{2}+r-1}$ (resp. $\bar{A}_{\frac{n}{2}+r-1}$, $A_{\frac{n}{2}+r-1}$):

$$\frac{T(2r,m)}{m!} = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+r} (\frac{n}{2}+r-1)!\ r!}{2^{\frac{n}{2}+2r+1}} \left[-a_{-2}^m B_r - a_{-1}^m A_{\frac{n}{2}+r-1} \right.$$

$$\left. + \sum_{t=0}^{m} \frac{(-1)^t}{t!} a_t^m S(-n-2r,t) \right]$$

$$\frac{T(2r,m)}{m!} = \frac{(\frac{n}{2}+r-1)!\,r!}{2\,\pi^{\frac{n}{2}+2r+1}} \left\{ (-1)^{\frac{n}{2}+r-1} a^m_{-2} B_r \right.$$

$$\left. + (-1)^{\frac{n}{2}+r-1} a^m_{-1} A_{\frac{n}{2}+r-1} + \sum_{t=0}^{m} \left(\frac{(-1)^t}{t!} a^m_t G(-n-2r,t)\right) \right\}$$

Il en résulte

$$\frac{FS(2r,m)}{m!} = \frac{(\frac{n}{2}+r-1)!\; r!}{2\,\pi^{\frac{n}{2}+2r+1}} \left\{ 2\;(-1)^{\frac{n}{2}+r-1} b^m_{-2} B_r \right.$$

$$+ (-1)^{\frac{n}{2}+r-1} b^m_{-1} \left(A_{\frac{n}{2}+r-1} + \bar{A}_{\frac{n}{2}+r-1}\right) - i(-1)^{\frac{n}{2}+r-1} c^m_{-1} \left(A_{\frac{n}{2}+r-1}\right.$$

$$\left. - \bar{A}_{\frac{n}{2}+r-1}\right) + \sum_{t=0}^{m} \frac{(-1)^t}{t!} \left[a^m_t P(-n-2r,t) + b^m_t P_+(-n-2r,t)\right.$$

$$\left.\left. - i\, c^m_t P_-(-n-2r,t)\right]\right\} \qquad (17)$$

pour n pair.

Si n est impair, $T(2r,m)$ aura un terme proportional â B_r, mais $T(2r,m)$ n'aura pas *de* termes supplémentaires:

$$\frac{T(2r,m)}{m!} = \frac{(-1)^{(n+2r-1)/2}\, \Gamma(\frac{n+2r}{2})\; r!}{2\pi^{\frac{n}{2}+2r+1}} \left\{ i\, a^m_{-1} B_r + \right.$$

$$\left. + \sum_{t=0}^{m} \frac{(-1)^t}{t!} (-i)\; a^m_t\, S(-n-2r,t) \right\}$$

$$\frac{\bar{T}(2r,m)}{m!} = \frac{(-1)^{(n+2r-1)/2}\,\Gamma\left(\frac{n+2r}{2}\right)\, r!}{2\pi^{\frac{n}{2}+2r+1}} \left\{ -\, i\, a^m_{-1}\, B_r \right.$$

$$\left. + \sum_{t=0}^{m} \frac{(-1)^t}{t!}\; i\, \overline{a^m_t}\; \bar{S}(-n-2r,t) \right\}$$

$$\frac{F(2r,m)}{m!} = \frac{\Gamma\left(\frac{n+2r}{2}\right)\, r!}{2\pi^{\frac{n}{2}+2r+1}} \sum_{t=0}^{m} \frac{(-1)^t}{t!}\, a^m_t\; G(-n-2r,t) \quad ,$$

d'où il résulte

$$\frac{FS(2r,m)}{m!} = \frac{\Gamma\left(\frac{n+2r}{2}\right)\, r!}{2\pi^{\frac{n}{2}+2r+1}} \left\{ 2(-1)^{(n+2r+1)/2}\, c^m_{-1}\;\; B_r \right.$$

$$\left. + \sum_{t=0}^{m} \frac{(-1)^t}{t!} \left[a^m_t\, P(-n-2r,t) + b^m_t\, P_+(-n-2r,t) - i\, c^m_t\, P_-(-n-2r,t) \right] \right\} \tag{18}$$

pour n impair.

Les formules (4.17) et (4.18) peuvent s'écrire en fonction des $\Box\,\delta_0$ et des $H_{\mp}^{n/2+r-1}$, à l'aide de (1.13) et (1.12):

$$\frac{FS(2r,m)}{m!} = \frac{\left(\frac{n}{2}+r-1\right)!\,r!}{2\pi^{\frac{n}{2}+2r+1}} \left\{ \frac{(-1)^{r-1}\,\pi^{(n-2)/2}}{2^{2r}\, r!\,\left(\frac{n}{2}+r-1\right)!} \left[b^m_{-2} - b^m_{-1}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{\frac{n}{2}+r-1}\right)\right] \Box^r\,\delta_0 + \frac{b^m_{-1}}{\left(\frac{n}{2}+r-1\right)!}\; H_+^{\frac{n}{2}+r-1}$$

$$- i\, \frac{c^m_{-1}}{\left(\frac{n}{2}+r-1\right)!}\; H_-^{\frac{n}{2}+r-1} + \sum_{t=0}^{m} \frac{(-1)^t}{t!} \left[a^m_t\, P(-n-2r,t) + \right.$$

$$+\, b_t^m\, P_+(-n-2r,t) - i\, c_t^m\, P_-(-n-2r,t)\Big]\Big\} \quad , \tag{19}$$

pour n pair,

$$\frac{FS(2r,m)}{m!} = \frac{\Gamma\left(\frac{n+2r}{2}\right) r!}{2\pi^{\frac{n}{2}+2r+1}} \left\{ \frac{(-1)^r\, \pi^{\frac{n}{2}}\, c_{-1}^m}{2^{2r}\, r!\, \Gamma\left(\frac{n+2r}{2}\right)} \Box^r\, \delta_0 \right.$$

$$\left. +\sum_{t=0}^{m} \frac{(-1)^t}{t!} \Big[a_t^m P(-n-2r,t) + b_t^m\, P_+(-n-2r,t) - i\, c_t^m\, P_-(-n-2r,t)\Big]\right\} \tag{20}$$

pour n impair.

En particulier, on trouve pour $m=0$:

$$FS(2r) = \frac{\left(\frac{n}{2}+r-1\right)!\; r!}{2\pi^{\frac{n}{2}+2r+1}} \left\{ \frac{(-1)^r \pi^{(n+2)/2}}{2^{2r+1}\, r!\, \left(\frac{n}{2}+r-1\right)!} \Box^r\, \delta_0 \right.$$

$$\left. \frac{i\pi}{\left(\frac{n}{2}+r-1\right)!} H_-^{\frac{n}{2}+r-1} + P(-n-2r) \right\} , \tag{21}$$

si n est pair

$$FS(2r) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+2r}{2}\right) r!}{2\pi^{\frac{n}{2}+2r+1}} \left\{ \frac{(-1)^r \pi^{(n+2)/2}}{2^{2r}\, r!\, \Gamma\left(\frac{n+2r}{2}\right)} \Box^r\, \delta_0 + P(-n-2r) \right\} , \tag{22}$$

si n est impair.

En present $m=1$, on a:

$$FS(2r,1) = \frac{\left(\frac{n}{2}+r-1\right)!\; r!}{2\pi^{\frac{n}{2}+2r+1}} \left\{ \frac{(-1)^r\, \pi^{(n+2)/2}}{2^{2r+1}\, r!\, \left(\frac{n}{2}+r-1\right)!} \Big[\psi(r+1) - \right.$$

$$- \gamma - 2 \log \pi\Big] \Box^r\, \delta_0 \quad \frac{\pi^2}{2\left(\frac{n}{2}+r-1\right)!} H_+^{\frac{n}{2}+r-1}$$

$$- i\pi \frac{\xi(r)}{(\frac{n}{2}+r-1)!} H_-^{\frac{n}{2}+r-1} + \xi(r)\, P(-n-2r) -$$

$$- P(-n-2r,\ 1\ ) - i\pi\, P_-(-n-2r) \Big\} \quad , \tag{23}$$

si n est pair et

$$FS(2r,1) = \frac{\Gamma(\frac{n+2}{2})\ r!}{2\pi^{\frac{n}{2}+2r+1}} \left\{ \frac{(-1)^r \pi^{\frac{n+2}{2}}\ \xi(r)}{2^{2r} r!\ \Gamma(\frac{n+2r}{2})} \Box^r \delta_0 \right.$$

$$\left. + \xi(r)\ P(-n-2r) - P(-n-2r,1) - \text{ia}\ P_-(-n-2r) \right\} \tag{24}$$

si n est impair; avec $\xi(r) = \psi(\frac{n+2r}{2}) + \psi(r+1) - 2 \log a$. Rappelons que,

i n est impair, $P_\pm(-n-2r) = i(-1)^{n+2r+1/2} \left[S(-n-2r) \mp \bar{S}(-n-2r)\right]$.

Étudions maintenant, les cas où p est exceptionnel, à savoir les quatre cas suivants: $p = -2k$, n pair et $k > \frac{n-2}{2}$; $p = -2k$, n pair et $k \leq \frac{n-2}{2}$; $p = -2k$, n impair et finalement $p = -(n+2r)$, n impair,.

c) Dans le premier, $p = -2k$, n pair et $k > \frac{n-2}{2}$ on a la série de Laurent

$$FS(-2k+2\lambda) = -FB_{k-\frac{n}{2}}\ \lambda^{-2} + FA_{k-1}\ \lambda^{-1} + FS(-2k) + FS(-2k,1) + \ldots \tag{25}$$

ce qui nous permet d'obtenir non seulement les images de $S(-2k,m)$ mais aussi celles des $B_{k-\frac{n}{2}}$ et de A_{k-1}. D'autre part, 2k-n n'étant pas exceptionnel, il n'y a pas des termes singuliers dans le développernent de la fonction $S(2k-n-2\lambda)$:

$$S(2k-n-2\lambda) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-1)^t}{t!} S(2k-n,t)\ \lambda^t$$

$$G(2k-n-2\lambda) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-1)^t}{t!} G(2k-n,t)\ \lambda^t$$

Il arrive que, les valeurs $\frac{n}{2}$ - ket I-k, k = 1,2,3,..., étant des pôles pour la fonction Γ, lesdéveloppements (4-a,b) ne sont plus valables. Cherchons, donc, le développement de la fonction $\Gamma(z)$ au voisinage d'un pôle. On peut le déterminer à l'aide de la formule

$$\Gamma(-m+\lambda) = \frac{(-1)^m \operatorname{cosec} \pi\lambda}{\Gamma(m+1-\lambda)} \qquad m = 0,1,2,..$$

La fonction $\frac{1}{\Gamma(m+1-\lambda)}$ peut être développée en série de Taylor au voisinage de $\lambda=0$. On a

$$\frac{1}{\Gamma(m+1-\lambda)} = \frac{1}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} \gamma\ (m+1)\ \lambda^n , \tag{26}$$

avec

$$\frac{\gamma_n(m+1)}{m!} = \frac{(-1)^n}{n!} \left\{ \frac{d^n}{d\lambda^n} \left(\frac{1}{\Gamma(m+1-\lambda)} \right) \right\}_{\lambda=0}$$

$\gamma_0(m+1) = 1$, $\gamma_1(m+1) = \psi(m+1)$, $\gamma_2(m+1) = \frac{1}{2}\left[\psi^2(m+1) - \psi(m+1)\right]$, $\gamma_3(m+1)$ $= \frac{1}{3!}\left[\psi^3(m+1) - 3\psi(m+1)\ \psi'(m+1) + \psi''(m+1)\right]$, ... ,

En utilisant le développement

$$\operatorname{cosec} \pi\lambda = \frac{1}{\lambda} + 2\pi\lambda \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\pi^2(r^2-\lambda^2)} \tag{27}$$

on obtient

$$\operatorname{cosec} \pi\lambda = \pi^{-1} \sum_{p=0}^{m} K_{2p-1}\ \lambda^{2p-1} \tag{28}$$

$$K_{2p-1} = (-1)^{p+1}\ (1-2^{1-2p})\,(2\pi)^{2p}\ \frac{B_{2p}}{(2p)!} , \qquad p = 0,1,2, \ldots$$

où B_{2p} dénote le numéro de Bernouilli(1) définit par l'équation

---

(1) Voir A.Erdélyi[4].

$$z(e^{z}-1)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!} \qquad z < 2\pi$$

On a

$$B_0 = 1\ ,\quad B_1 = -\frac{1}{2}\ ,\quad B_2 = \frac{1}{6}\ ,\quad B_4 = -\frac{1}{30}\ ,\quad B_6 = \frac{1}{42}\ ,\ \dots$$

$$K_{-1} = 1\ ,\quad K_1 = \frac{\pi^2}{6}\ ,\quad K_3 = \frac{7}{15}\frac{\pi^4}{4!}\ ,\ \dots$$

On trouve alors le développement de $\Gamma(-m+\lambda)$ en série de Laurent au voisinage de $\lambda=0$

$$\Gamma(-m+\lambda) = \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{p=0}^{\infty} K_{2p-1}\ \lambda^{2p-1} \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n(m+1)\ \lambda^n =$$

$$= \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{j=0}^{\infty} \beta_{j-1}(m)\ \lambda^{j-1}\ ,$$

$$\beta_{j-1}(m) = \sum_{n=0}^{j} K_{j-n-1}\ \gamma_n(m+1) \tag{29}$$

On a

$$\beta_{-1}(m) = 1\ ,\qquad \beta_0(m) = K_{-1}\,\gamma_1 = \psi(m+1)\ ,$$

$$\beta_1(m) = K_1\gamma_0 + K_{-1}\gamma_2 = \frac{1}{2}\left[\psi^2(m+1) - \psi'(m+1) + \frac{\pi^2}{3}\right]\ ,$$

$$\beta_2(m) = K_1\gamma_1 + K_{-1}\gamma_3 = \frac{1}{3!}\left[\psi^3(m+1) - 3\psi(m+1)\psi'(m+1) + \right.$$

$$\left. + \pi^2\psi(m+1) + \psi''(m+1)\right]\ ,\ \dots$$

Nous aurons, donc, au lieu de (4.4 - a, b, e) les séries

$$\text{a}')\quad \Gamma\left(\frac{n}{2} - k + \lambda\right) = \frac{(-1)^{k-\frac{n}{2}}}{\left(k - \frac{n}{2}\right)!} \sum_{j=0}^{\infty} \beta_{j-1}\left(k - \frac{n}{2}\right) \lambda^{j-1}$$

$$\text{b}')\quad \Gamma(1 - k + \lambda) = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \sum_{h=0}^{\infty} \beta_{h-1}(k-1)\lambda^{h-1}$$

e) $S(2k-n-2\lambda) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-1)^t}{t!} S(2k-n,t)\ \lambda^t$

e') $G(2k-n-2\lambda) = \sum_{t=0}^{m} \frac{(-1)^t}{t!} G(2k-n,t)\ \lambda^t$

En recherchant le coefficient de $-\lambda^{-2}$, on trouvera l'image de Fourier de $B_{k-\frac{n}{2}}$

$$FB_{k-\frac{n}{2}} = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}\ \beta_{-1}(k-\frac{n}{2})\ \beta_{-1}(k-1)}{2(k-\frac{n}{2})!\ (k-1)!\ \pi^{\frac{n}{2}-2k+1}} P(2k-n)$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2(k-\frac{n}{2})!\ (k-1)!\ \pi^{\frac{n}{2}-2k+1}} P(2k-n) \qquad (30)$$

ce qui peut aussi s'écrire:

$$FB_r = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}\ \pi^{2r+\frac{n}{2}-1}}{2\ r!\ (\frac{n}{2}+r-1)!} P(2r) \qquad (31)$$

$r = 0,1,2,\ldots,$ n pair.

Analoguement, le coefficient de λ^{-1} nous donne l'image de A_{k-1}. Il est aisé de voir que FA_{k-1} est égal à

$$FA_{k-1} = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}-1}\ \pi^{2k-\frac{n}{2}-1}}{2(k-\frac{n}{2})!\ (k-1)!} \{a_0^{-1} P(2k-n) - a_1^{-1} P(2k-n,1) - ic_0^{-1} P(2k-n,2)\}$$

avec

$$a_0^{-1} = \beta_0(k-\frac{n}{2}) + \beta_0(k-1) - 2\log\pi = \psi(k) + \psi(k-\frac{n}{2}+1) - 2\log\pi =$$

$$= \xi(k-\frac{n}{2})$$

$$a_1^{-1} = \beta_{-1}(k-\tfrac{n}{2})\ \beta_{-1}(k-1) = 1 \tag{32}$$

$$c_0^{-1} = \pi\ .$$

On en déduit H^{k-I}, compte tenu de (1.12):

$$FH^{k-1} = \frac{(-1)^{k-\frac{n}{2}}\ \pi^{2k-\frac{n}{2}-1}}{2(k-\frac{n}{2})!}\ \{|\psi(k-\tfrac{n}{2}+1) - 2\log\pi - \gamma|\ P(2k-n)$$

$$- P(2k-n,1) - i a\ \ P_{-}(2k-n)\}\quad , \tag{33}$$

pour n pair et $k \geq \frac{n}{2}$.

On trouve, enfin, les images de Fourier de $S(-2k,m)$:

$$\frac{FS(-2k,m)}{m!} = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}-1}\ \pi^{2k-\frac{n}{2}-1}}{2(k-\frac{n}{2})!\ (k-1)!}\ \sum_{t=0}^{m+2} \frac{(-1)^t}{t!}\ \{a_t^m\ P(2k-n,\ t)$$

$$+ b_t^m\ P_{+}(2k-n,t) - ic_t^m\ P_{-}(2k-n,t)\ \}\quad , \tag{34}$$

$$a_t^m = \sum_{\substack{j,h,\ell \geq 0\\ [j+h+\ell = m-t+2]}} \frac{\beta_{j-1}(k-\frac{n}{2})\ \beta_{h-1}(k-1)\ (-2\log\pi)^{\ell}}{\ell!} \tag{35}$$

$$b_t^m = \sum_{\substack{j,h,\ell,u \geq 0\\ [j+h+\ell+2u+2 = m-t+2]}} \frac{\beta_{-1}(k-\frac{n}{2})\ \beta_{h-1}(k-1)(-2\log\pi)^{\ell}(-1)^{u+1}\pi^{2u+2}}{\ell!\ (2u+2)!}$$

(36)

$$c_t^m = \sum_{\substack{j,h,\ell,u \geq 0 \\ [j+h+\ell+2u+1=m-t+2]}} \frac{\beta_{j-1}(k-\frac{n}{2})\ \beta_{h-1}(k-1)(-2\ \log\ \pi)^{\ell}\ (-1)^u \pi^{2u+1}}{\ell!\ (2u+1)!}$$

(37)

En particulier, on a pour $m=0$:

$$a_0^0 = \beta_1(k-\frac{n}{2}) + \beta_1(k-1) + \frac{1}{2}(-2\log\pi)^2 + \beta_0(k-\frac{n}{2})\ \beta_0(k-1) =$$

$$- 2\log\pi[\beta_0(k-\frac{n}{2}) + \beta_0(k-1)] = \frac{1}{2}[\psi(k) + \psi(k-\frac{n}{2}+1) + (2\log\pi)^2$$

$$- 4\log\pi\ (\psi(k-\frac{n}{2}+1) + \psi(k)) + 2\psi(k)\psi(k-\frac{n}{2}+1) - \psi'(k-\frac{n}{2}) - \psi'(k)$$

$$+ \frac{2}{3}\pi^2] = \frac{1}{2}[\xi^2(k-\frac{n}{2}) - \xi'(k-\frac{n}{2}) + \frac{2}{3}\pi^2],$$

$$a_1^0 = \beta_0(k-\frac{n}{2}) + \beta_0(k-1) - 2\log\pi = \xi(k-\frac{n}{2}),$$

$$a_2^0 = \beta_{-1}(k-\frac{n}{2})\ \beta_{-1}(k-1) = 1,\quad b_0^0 = -\frac{\pi^2}{2}\quad c_0^0 = \pi\xi(k-\frac{n}{2}),\ c_1^0 = \pi$$

d'où il résulte

$$F_S(-2k) = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}-1}\pi^{2k-\frac{n}{2}-1}}{2(k-\frac{n}{2})!\ (k-1)!}\left\{\frac{1}{2}[\xi^2(k-\frac{n}{2}) - \xi'(k-\frac{n}{2}) + \frac{2}{3}\pi^2]P(2k-n)\right.$$

$$- \xi(k-\frac{n}{2})\ P(2k-n,1) + \frac{1}{2}P(2k-n,2) - \frac{\pi^2}{2}P_+(2k-n)$$

$$\left.- i\pi\ \xi(k-\frac{n}{2})\ P_-(2k-n) + i\pi\ P_-(2k-n,1)\right\}. \qquad (38)$$

En prenant $m=1$ *on trouve*

$$a_0^1 = \beta_2(k-\frac{n}{2}) + \beta_2(k-1) + \frac{1}{3!}(-2\log\pi)^3 + \beta_1(k-\frac{n}{2})\ [\beta_0(k-1) - 2\log\pi]$$

$$+ \beta_1(k-1)\left[\beta_0(k-\tfrac{n}{2}) - 2\log\pi\right] + \frac{1}{2}(-2\log\pi)^2\left[\beta_0(k-\tfrac{n}{2}) + \beta_0(k-1)\right]$$

$$= \frac{1}{3!}\left[\xi^3(k-\tfrac{n}{2}) + \xi''(k-\tfrac{n}{2}) - 3\xi(k-\tfrac{n}{2})\xi'(k-\tfrac{n}{2}) + 2\pi^2\xi\,(k-\tfrac{n}{2})\right] ,$$

$$a^1_1 = a^0_1 = \frac{1}{2}\left[\xi^2(k-\tfrac{n}{2}) - \xi'(k-\tfrac{n}{2}) + \frac{2}{3}\pi^2\right] ,$$

$$a^1_2 = a^0_1 = \xi(k-\tfrac{n}{2}) \quad , \quad a^1_3 = a^0_2 = 1 ,$$

$$b^1_0 = b^0_0 = -\frac{\pi^2}{2}\xi(k-\tfrac{n}{2}) \quad , \quad b^1_1 = b^0_0 = -\frac{\pi^2}{2} ,$$

$$c^1_0 = \pi\left[\xi^2(k-\tfrac{n}{2}) - \xi'(k-\tfrac{n}{2})\right] , \quad c^1_1 = \pi\xi(k-\tfrac{n}{2}) , \quad c^1_2 = c^0_1 = \pi .$$

Cela nous donne

$$S(-2k,1) = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}-1}\,\pi^{2k-\frac{n}{2}-1}}{2(k-\frac{n}{2})!\,(k-1)!}\left\{\frac{1}{3!}\left[\xi^3(k-\tfrac{n}{2}) + \xi''(k-\tfrac{n}{2})\right.\right.$$

$$\left. - 3\xi(k-\tfrac{n}{2})\xi'(k-\tfrac{n}{2}) + 2\pi^2\xi(k-\tfrac{n}{2})\right] P(2k-n) - \frac{1}{2}\left[\xi^2(k-\tfrac{n}{2})\right.$$

$$\left. - \xi'(k-\tfrac{n}{2}) + \frac{2}{3}\pi^2\right] P(2k-n,1) + \frac{1}{2}\xi(k-\tfrac{n}{2})\,P(2k-n,2)$$

$$- \frac{1}{3!}P(2k-n,3) - \frac{\pi^2}{2}\xi(k-\tfrac{n}{2})\,P_+(2k-n) + \frac{\pi^2}{2}P_+(2k-n,1)$$

$$- i\pi\left[\xi^2(k-\tfrac{n}{2}) - \xi'(k-\tfrac{n}{2})\right] P_-(2k-n) + i\pi\,\xi(k-\tfrac{n}{2})P_-(2k-n,1)$$

$$\left. - \frac{i\pi}{2}P_-(2k-n,2)\right\} . \qquad (39)$$

d) Soit maintenant $p = -2k$, $k \leq \frac{n-2}{2}$, n pair. On a alors

$$S(-2k+2\lambda) = A_{k-1}\,\lambda^{-1} + S(-2k) + S(-2k,1)\lambda + S(-2k,2)\frac{\lambda^2}{2!} + \dots$$

Dans ce cas $\lambda=0$ n'est plus un pôle pour $\Gamma(\frac{n}{2} - k + \lambda)$. Par conséquent on doit remplacer *(4.4 - a')* par

$$\Gamma(\tfrac{n}{2} - k + \lambda) = (\tfrac{n}{2} - k - 1)!\ \sum_{t=0}^{\infty} \alpha_j(\tfrac{n}{2} - k)\ \lambda^j , \tag{40}$$

$$\alpha_j(z_0) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{d^j}{d\lambda^j}\,\Gamma(z_0+\lambda)\ ,\quad \alpha_0(\tfrac{n}{2} - k) = 1\ ,\quad \alpha_1(\tfrac{n}{2} - k) = \psi(\tfrac{n}{2} - k)\ ,$$

$$\alpha_2(\tfrac{n}{2} - k) = \frac{1}{2}\ \left[\psi^2(\tfrac{n}{2} - k) + \psi'(\tfrac{n}{2} - k)\right]\ , \ \ldots$$

D'autre part la fonction $S(2k-n-2\lambda)$ n'étant plus holomorphe au voisinage de $\lambda=0$, elle admet le développement en série de Laurent

$$S(2k-n-2\lambda) = -A_{\frac{n}{2} - k - 1}\ \lambda^{-1} + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-1)^t}{t!}\, S(2k-n,t)\ \lambda^t$$

Par un calcul analogue au précédent on trouve, comme coefficient de λ^{-1}

$$FA_{k-1} = \frac{(-1)^{k-1}\ (\frac{n}{2} - k - 1)!}{2(k-1)!\ \pi^{\frac{n}{2} - 2k+1}} \left\{ - (-1)^{\frac{n}{2} - k - 1}\ i\pi\ A_{\frac{n}{2} - k - 1} \right.$$

$$\left. - \ \bar{}_{\frac{n}{2} - k - 1} + P(2k-n) \right\} \tag{41}$$

d'où il s'ensuit

$$FH^{k-1} = \frac{(\frac{n}{2} - k - 1)!}{2\ \pi^{\frac{n}{2} - 2k+1}} \left\{ P(2k-n) - \frac{i\pi}{(\frac{n}{2} - k - 1)!}\ H_-^{\frac{n}{2} - k - 1} \right\} \tag{42}$$

De la même manière, si l'on on pose

$$FS(-2k,m) = T(-2k,m) + \bar{T}(-2k,m) + T(-2k,m)$$

on obtient

$$\frac{T(-2k,m)}{m!} = \frac{(-1)^{\frac{n}{2} - 1}\ (\frac{n}{2} - k - 1)!}{2(k-1)!\ \pi^{\frac{n}{2} - 2k - 1}} \left\{ - a_{-1}^m\ A_{\frac{n}{2} - k - 1} + \sum_{t=0}^{m+1} \frac{(-1)^t}{t!}\ a_t^m\ S(2k-n,t) \right\}$$

$$\frac{T(-2k,m)}{m!} = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}-1}\,(\frac{n}{2}-k-1)!}{2(k-1)!\,\pi^{\frac{n}{2}-2k+1}} \left\{ a^{m}_{-1}\, A_{\frac{n}{2}-k-1} + \right.$$

$$\left. + \sum_{t=0}^{m+1} \frac{(-1)^t}{t!}\, a^m_t\, (-1)^{\frac{n}{2}-k}\, G(2k-n,t) \right\}$$

avec $a^m_t = a^m_t + b^m_t - ic^m_t$,

$$a^m_t = \sum_{\substack{j,h,\ell \geq 0 \\ [j+h+\ell = m-t+1]}} \frac{\alpha_j(\frac{n}{2}-k)\beta_{h-1}(k-1)(-2\log\pi)^{\ell}}{\ell!} \tag{43}$$

$$b^m_t = \sum_{\substack{j,h,\ell,u \geq 0 \\ [j+h+\ell+2u+2 = m-t+1]}} \frac{\beta_j(\frac{n}{2}-k)\beta_{h-1}(k-1)(-2\log\pi)^{\ell}(-1)^{u+1}\pi^{2u+2}}{\ell!\,(2u+2)!} \tag{44}$$

$$c^m_t = \sum_{\substack{j,h,\ell,u \geq 0 \\ [j+h+\ell+2u+1 = m-t+1]}} \frac{\alpha_j(\frac{n}{2}-k)\beta_{h-1}(k-1)(-2\log\pi)^{\ell}(-1)^{u}\pi^{2u+1}}{\ell!\,(2u+1)!} \tag{45}$$

Il en résulte que

$$\frac{FS(-2k,m)}{m!} = \frac{(-1)^{k-1}(\frac{n}{2}-k-1)!}{2(k-1)!\,\pi^{\frac{n}{2}-2k+1}} \left\{ (-1)^{\frac{n}{2}-k-1}\, b^m_{-1} \left[A_{\frac{n}{2}-k-1} + \bar{A}_{\frac{n}{2}-k-1} \right] \right.$$

$$- (-1)^{\frac{n}{2}-k-1} \, ic^m_{-1} \left[A_{\frac{n}{2}-k-1} - A_{\frac{n}{2}-k-1}\right]$$

$$\left. + \sum_{t=0}^{m+1} \frac{(-1)^t}{t!} \left[a^m_t \, P(2k-n,t) + b^m_t \, P_+(2k-n,t) - ic^m_t \, P_-(2k-n,t)\right]\right\}$$

$$= \frac{(-1)^{k-1}(\frac{n}{2}-k-1)!}{2(k-1)!\pi^{\frac{n}{2}-2k+1}} \left\{ \frac{b^m_{-1}}{(\frac{n}{2}-k-1)!} H_+^{\frac{n}{2}-k-1} \quad \frac{ic^m_{-1}}{(\frac{n}{2}-k-1)!} H_-^{\frac{n}{2}-k-1} + \right.$$

$$+ \sum_{t=0}^{m+1} \frac{(-1)^t}{t!} \left[a^m_t \, P(2k-n,t) + b^m_t \, P_+(2k-n,t)\right.$$

$$\left.\left. - ic^m_t \, P_-(2k-n,t)\right]\right\} \qquad (46)$$

En prenant $m=0$, on trouve donc

$$FS(-2k) = \frac{(-1)^{k-1}(\frac{n}{2}-k-1)!}{2(k-1)!\,\pi^{\frac{n}{2}-2k-1}} \left\{ \eta(-k)\, P(2k-n) - P(2k-n,1) \right.$$

$$\left. - i\pi\, P(2k-n) - \frac{\pi^2}{2(\frac{n}{2}-k-1)!} H_+^{\frac{n}{2}-k-1} - i\pi\, \eta(-k)\, H_-^{\frac{n}{2}-k-1} \right\} , \qquad (47)$$

où $\eta(\frac{p}{2})$ désigne la fonction $\psi(\frac{n+p}{2}) + \psi(-\frac{p}{2}) - 2 \log n$.

En prenant $m=1$ on trouve'

$$FS(-2k,1) = \frac{(-1)^{k-1}(\frac{n}{2}-k-1)!}{2(k-1)!\,\pi^{\frac{n}{2}-2k+1}} \left\{ - \frac{\pi^2\,\eta(-k)}{2(\frac{n}{2}-k-1)!} H_+^{\frac{n}{2}-k-1} \right.$$

$$- i\pi \frac{\eta^2(-k) - \eta'(-k)}{2(\frac{n}{2} - k - 1)!} H_-^{\frac{n}{2} - k - 1} + \frac{1}{2} \Big[\eta^2(-k) - \eta'(-k)$$

$$+ \frac{\pi^2}{3}\Big] P(2k-n) - \eta(-k) P(2k-n,1) + \frac{1}{2} P(2k-n,2) - \frac{\pi^2}{2} P_+(2k-n)$$

$$\left. - i\pi\, \eta(-k)\, P_-(2k-n) + i\pi\, P_-(2k-n,1)\right\} , \qquad (48)$$

$\eta'(\frac{p}{2}) = \psi'(\frac{n+p}{2}) - \psi'(-\frac{p}{2})$, $p \neq 2r$, $r = 0,1, \ldots$.

e) Le troisiènie cas $p = -2k$, n impair, ne diffère du précédent que par le fait que $S(2k-n)$ est maintenant holornorphe.

On trouve, alors

$$F A_{k-1} = \frac{(-1)^{k-1} \Gamma(\frac{n-2k}{2})}{2(k-1)!\, \pi^{\frac{n}{2} - 2k + 1}} P(2k-n) \qquad (49)$$

d'où il vient

$$F H^{k-1} = \frac{\Gamma(\frac{n-2k}{2})}{2\, a^{\frac{n}{2} - 2k + 1}} P(2k-n) \qquad (50)$$

pour n impair.

En général on a

$$\frac{F S(-2k,m)}{m!} = \frac{(-1)^{k-1} \Gamma(\frac{n-2k}{2})}{2(k-1)!\, \pi^{\frac{n}{2} - 2k + 1}} \sum_{t=0}^{m+1} \frac{(-1)^t}{t!} \left\{ a_t^m P(2k-n,t) \right.$$

$$\left. + b_t^m P_+(2k-n,t) - i c_t^m P_-(2k-n,t) \right\} \qquad (51)$$

En prenant successivement $m=0$, $m=1$ on obtient

$$FS(-2k) = \frac{(-1)^{k-1}\Gamma(\frac{n-2k}{2})}{2(k-1)!\pi^{\frac{n}{2}-2k+1}} \left\{\eta(-k)\ P(2k-n) - P(2k-n,1) - i\pi\ P_-(2k-n)\right\} \tag{52}$$

$$FS(-2k,1) = \frac{(-1)^{k-1}\ \Gamma(\frac{n-2k}{2})}{2(k-1)!\pi^{\frac{n}{2}-2k+1}} \left\{ \frac{1}{2}\left[\eta^2(-k) - \eta'(-k) + \frac{\pi^2}{3}\right] P(2k-n) \right.$$

$$- \eta(-k)\ P(2k-n,1) + \frac{1}{2}\ P(2k-n,2) - \frac{\pi^2}{2}\ P_+(2k-n)$$

$$\left. - i\pi\ \eta(-k)\ P_-(2k-n) + i\pi\ P_-(2k-n,1)\right\}\quad , \tag{53}$$

n étant impair. Rappelons que si n est inpair, on a

$$\psi(\frac{n-2k}{2}) = \psi(\frac{1}{2}) + 2\left[1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n-2k-2}\right]$$

f) Enfin, pour terminer, soit $p = -n-2r$, $r = 0,1,2,\dots,$ n impair. De (3.15") on tire la série

$$FS(-n-2r+2\lambda) = FB_r\ \lambda^{-1} + \sum_{m=0}^{\infty} S(-n-2r,m)\ \frac{\lambda^m}{m!}$$

Dans ce cas les développements

$$\Gamma(-r+\lambda) = \frac{(-1)^r}{r!} \sum_{j=0}^{\infty} \beta_{j-1}(r)\ \lambda^{j-1}$$

$$\Gamma(\frac{2-n-2r}{2} + \lambda) = \Gamma(\frac{2-n-2r}{2}) \sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h(\frac{2-n-2r}{2})\ \lambda^h \tag{54}$$

$$S(-2r-2\lambda) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-1)^t}{t!}\ S(2r,t)\ \lambda^t$$

$$G(-2r-2\lambda) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-1)^t}{t!} G(2r,t)\, \lambda^t$$

doivent remplacer les développements correspondants du cas précédent.

On trouve

$$FB_r = \frac{(-1)^r\, \Gamma(\frac{2-n-2r}{2})\, \pi^{\frac{n}{2}+2r-1}}{2r!} P(2r) \tag{55}$$

$$\frac{FS(-n-r,m)}{m!} = \frac{(-1)^r \Gamma(\frac{2-n-2r}{2})\, \pi^{\frac{n}{2}+2r-1}}{2r!} \sum_{t=0}^{m+1} \frac{(-1)^t}{t!} \Big\{ a_t^m\, P(2r,t)$$

$$+ b_t^m\, P_+(2r,t) - ic_t^m\, P_-(2r,t) \Big\} \tag{56}$$

ou

$$a_t^m = \sum_{\substack{j,h,\ell \geq 0 \\ [j+h+\ell = m-t+1]}} \frac{\beta_{j-1}(r)\, \alpha_h(\frac{2-n-2r}{2})\, (-2 \log \pi)^R}{\ell!} \tag{57}$$

$$b_t^m = \sum_{\substack{j,h,\ell,u \geq 0 \\ [j+h+\ell+2u+2=m-t+1]}} \frac{\beta_{j-1}(r)\alpha_h(\frac{2-n-2r}{2})\, (-2 \log \pi)^\ell\, (-1)^{u+1}\pi^{2u+2}}{\ell!\, (2u+2)!} \tag{58}$$

$$c_t^m = \sum_{\substack{j,h,\ell,u \geq 0 \\ [j+h+\ell+2u+1=m-t+1]}} \frac{\beta_{j-1}(r)\alpha_h(\frac{2-n-2r}{2})\, (-2 \log \pi)^\ell (-1)^u\, \pi^{2u+1}}{\ell!\, (2u+1)!} \tag{59}$$

On voit que pour $m=0$ et pour m=l la formule (4.56) devient

$$F S(-n-2r) = \frac{(-1)^r \, \Gamma(\frac{2-n-2r}{2}) \, \pi^{\frac{n}{2}+2r-1}}{2\, r!} \{\zeta(r) \, P(2r) - P(2r,1) - iP_-(2r)\} \tag{60}$$

$$F S(-n-2r,1) = \frac{(-1)^r \Gamma(\frac{2-n-2r}{2}) \pi^{\frac{n}{2}+2r-1}}{2\, r!} \left\{ \frac{1}{2} \left[\zeta^2(r) - \zeta'(r) + \frac{\pi^2}{3}\right] P(2r) \right.$$
$$\left. - \zeta(r)P(2r,1) - \frac{\pi^2}{2} P_+(2r) - i\pi \, \zeta(r)P_-(2r) + i\pi \, P_-(2r,1) \right\} \tag{61}$$

où nous avons noté $\zeta(\frac{p}{2}) = \psi(\frac{2+p}{2}) + \psi(\frac{2-n-p}{2}) - 2 \log \pi$, $\zeta'(\frac{p}{2}) = \psi'(\frac{2+p}{2})$ - $- \psi'(\frac{2-n-p}{2})$.

Nous avons, ainsi, trouvé les transformées de Fourier des $S(p,m)$ pour tout complexe p et $m=0,1,\ldots$. Nous obtenons immédiatement les images des $\bar{S}(p,m)$ en applicant la propriété bien connue de la transformation de Fourier

$$F\bar{S}(p,m) = \bar{F}S(p,m) = \overline{(F S(p,m))} \ .$$

Pour $F\bar{S}(p,m)$ il suffit, donc, de interchanger dans chaque formule, les S et les $\bar{S}$, les A et les $\bar{A}$, et les H et les $\bar{H}$, respectivement. Evidemment, cette remarque s'applique aussi à $F\bar{H}^h$.

Il nous reste à calculer les transformées de Fourier des distributions $G(p,m)$, pour toutes les valeurs de p. Si p et $-p-n$ ne sont pas exceptionnels on peut avoir ces images en utilisant la formule (3.7): la moyenne arithmétique.de Z_4 et $\bar{Z}_q$ aura pour image de Fourier la distribution

$$F\left(\frac{Z_q + \bar{Z}_q}{2}\right) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^q \{ \cos\left(\frac{\pi q}{2}\right) S(-q) + G(-q) \} \tag{62}$$

Comme $Z_q + \bar{Z}_q$ est évidemment symmétrique, sa transformé et sà transformée conjuguée coincident, donc on peut remplacer $\bar{F}$ à F dans la formule ci-dessus. Alors en prenant la transformation de Fourier inverse des deux côtés de (4.62), on aura, avec $p = -q$

$$FG(p) = -\cos\left(\frac{\pi p}{2}\right) FS_{+}(p) + \frac{(2\pi)^{-p}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\, 2^{-p}\, \Gamma\left(-\frac{p}{2}\right) \left(\frac{2-p-n}{2}\right)} S_{+}(-n-p) \tag{63}$$

d'où il résulte, compte tenu de (4.2) et de la remarque faite ci-dessus,

$$FG(p) = -\frac{\Gamma\left(\frac{n+p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2+p}{2}\right)}{\pi^{\frac{n}{2}+p+1}} \left\{ \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) S_{+}(-n-p) + \cos\left(\frac{p\pi}{2}\right) G(-n-p) \right\} \tag{64}$$

pour p et $-n-p$ non exceptionnels. Cette formule ne diffère de (4.2) que par le facteur $\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right)$ devant G(-n-p) et par la présence de $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ à la place de $\exp\left(i\frac{p\pi}{2}\right)$. En recharchant les coefficients du développement de $FG(p+2\lambda)$ en série de Taylor ou de Laurent, selon la règle que nous avons utilisée jusqu'ici, nous obtiendrons les transformées de $G(p,m)$ pour tout p et pour $m = 0,1,2,\ldots$.

Dans le cas non exceptionnel, on a, compte tenu de les relations (4.4. - a,b,c,e,e') e de

$$\cos\left(\frac{p\pi}{2} + A\right) = \cos\frac{p\pi}{2} \sum_{u=0}^{\infty} \frac{(-1)^{u}\, \pi^{2u}}{(2u)!} \lambda^{2u} \tag{65}$$

$$\frac{FG(p,m)}{m!} = \frac{\Gamma\left(\frac{n+p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2+p}{2}\right)}{\pi^{\frac{n}{2}+p+1}} \sum_{t=0}^{m} \frac{(-1)^{t}}{t!} \left\{ d_t^m \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) S_{+}(-n-p,t) + \right.$$

$$\left. + d_t^m \cos\left(\frac{p\pi}{2}\right) G(-n-p,t) \right\} \tag{66}$$

avec $d_t^m = a_t^m + b_t^m$, a_t^m et b_t^m étant définis par (4.5) et (4.6), respectivement. Cette formule est la généralisation de (4.64). Il faut remarquer que si n est impair, $FG(p,m)$ est nulle à l'intérieur du cône de lumière.

Cas exceptionnels.

a) $p = 2k - n$, n impair. On trouve alors

$$\frac{FG(2k-n,m)}{m!} = - \frac{(k-1)!\ \Gamma(\frac{2+2k-n}{2})}{\pi^{2k-\frac{n}{2}+1}} \Bigg\{ (-1)^k\, d^m_{-1}\, A_{k-1}$$

$$+ \sum_{t=0}^{m} \frac{(-1)^t}{t!}\, d^m_t\, G(-2k,t) \Bigg\}$$

$$= \frac{(k-1)!\ \Gamma(\frac{2+2k-n}{2})}{\pi^{2k-\frac{n}{2}+1}} \Bigg\{ \frac{a^m_{-1} + b^m_{-1}}{(k-1)!}\, H_+^{k-1}$$

$$- \sum_{t=0}^{m} \frac{(-1)^t}{t!}\, (a^m_t + b^m_t)\, G(-2k,t) \Bigg\} \tag{67}$$

En prenant $m=0$ et puis $m=1$ on aura

$$FG(2k-n) = \frac{(k-1)!\ \Gamma(\frac{2+2k-n}{2})}{\pi^{2k-\frac{n}{2}+1}} \left\{ \frac{\xi(\frac{2k-n}{2})}{(k-1)!}\, H_+^{k-1} - G(-2k) \right\} \tag{68}$$

et

$$FG(2k-n,1) = \frac{(k-1)!\ \Gamma(\frac{2+2k-n}{2})}{\pi^{2k-\frac{n}{2}+1}} \Bigg\{ \frac{1}{2}\ \frac{\xi^2(\frac{2k-n}{2}) + \xi'(\frac{2k-n}{2}) - \pi^2}{(k-1)!}\, H_+^{k-1}$$

$$- \xi(\tfrac{2k-n}{2})\, G(-2k) + G(-2k,1) \Bigg\} \tag{69}$$

où $\xi(\frac{2k-n}{2}) = \psi(k) + \psi(\frac{2+2k-n}{2}) - 2 \log n$.

b) $p = 2r$. Si n est impair on trouvera

$$\frac{FG(2r,m)}{m!} = - \frac{(-1)^r\, r!\ \Gamma(\frac{n+2r}{2})}{\pi^{\frac{n}{2}+2r-1}} \sum_{t=0}^{m} \frac{(-1)^t}{t!}\, d^m_t\, G(-n-2r,t) \tag{70}$$

ce qui donne en prenant $m=0$ et $m=1$

$$FG(2r) = - \frac{(-1)^r \, r! \, \Gamma(\frac{n+2r}{2})}{\pi^{\frac{n}{2}+2r+1}} \, G(-n-2r) \tag{71}$$

$$FG(2r,1) = - \frac{(-1)^r \, r! \, \Gamma(\frac{n+2r}{2})}{\pi^{\frac{n}{2}+2r+1}} \, \{\xi(r) \, (-n-2r) - (-n-2r,1)\} \tag{72}$$

Si n est pair, on obtieridra

$$\frac{FG(2r,m)}{m!} = - \frac{(-1)^r \, r! \, (\frac{n}{2}+r-1)!}{\pi^{\frac{n}{2}+2r+1}} \left\{ (-1)^{\frac{n}{2}+r} b^m_{-2} \, B_r \right.$$

$$+ (-1)^{\frac{n}{2}+r} b^m_{-1} \, A_{\frac{n}{2}+r-1} + \sum_{t=0}^{m} \frac{(-1)^t}{t!} \left[a^m_t \, P(-n-2r,t) \right.$$

$$\left.\left. + b^m_t \, G(-n-2r,t) \right] \right\} =$$

$$= - \frac{(-1)^r r! (\frac{n}{2}+r-1)!}{\pi^{\frac{n}{2}+2r+1}} \left\{ \frac{(-1)^r \pi^{\frac{n-2}{2}} \left[b^m_{-2} - b^m_{-1} \left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n/2+r-1}\right) \right]}{2^{2r} \, r! \, (\frac{n}{2}+r-1)!} \right. \times$$

$$\times \square^r \delta_0 - \frac{b^m_{-1}}{(\frac{n}{2}+r-1)!} H_+^{\frac{n}{2}+r-1}$$

$$\left. + \sum_{t=0}^{m} \frac{(-1)^t}{t!} \left[a^m_t \, P(-n-2r,t) + b^m_t \, G(-n-2r,t) \right] \right\} \tag{73}$$

d'oũ il s'ensuit

$$FG(2r) = - \frac{(-1)^r \, r! \, (\frac{n}{2}+r-1)!}{\pi^{\frac{n}{2}+2r+1}} \left\{ \frac{(-1)^{r+1} \, \pi^{\frac{n+2}{2}}}{2^{2r+1} \, r! \, (\frac{n}{2}+r-1)!} \square^r \delta_0 + P(-n-2r) \right\} \tag{74}$$

et

$$FG(2r,1) = - \frac{(-1)^r \, r! \, (\frac{n}{2}+r-1)!}{\pi^{\frac{n}{2}+2r-1}} \left\{ \frac{(-1)^{r+1} \, \pi^{\frac{n+2}{2}}}{2^{2r+1} \, r! \, (\frac{n}{2}+r-1)!} \left[\psi(r+1) - \gamma - 2 \log \pi\right] \square^{r} \delta_0 + \frac{\pi^2}{2(\frac{n}{2}+r-1)!} H_+^{\frac{n}{2}+r-1} \right.$$

$$\left. + \, \xi(r) P(-n-2r) - P(-n-2r,1) \right\} \tag{75}$$

si n est pair.

c) $p = -2k$, n pair, $k > \frac{n}{2}$. Un raisonnement semblable à celui de la page   mènerait aux résultats suivants

$$\frac{FG(-2k,m)}{m!} = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} \, \pi^{2k-\frac{n}{2}-1}}{(k-\frac{n}{2})! \, (k-1)!} \sum_{t=0}^{m+2} \frac{(-1)^t}{t!} \left\{ (-1)^{\frac{n}{2}} a_t^m \, S_+(2k-n,t) \right.$$

$$\left. + \, (-1)^k d_t^m \; G(2k-n,t) \right\}$$

$$= \frac{(-1)^{k-\frac{n}{2}} \, \pi^{2k-\frac{n}{2}-1}}{(k-\frac{n}{2})! \, (k-1)!} \sum_{t=0}^{m+2} \frac{(-1)^t}{t!} \left\{ a_t^m \, P(2k-n,t) \right.$$

$$\left. + \, b_t^m \; G(2k-n,t) \right\} \tag{76}$$

et, compte tenu de (4.35, 36, 37),

$$FG(-2k) = \frac{(-1)^{k-\frac{n}{2}} \, \pi^{2k-\frac{n}{2}-1}}{(k-\frac{n}{2})! \, (k-1)!} \left\{ \frac{1}{2} \left[\xi^2(k-\tfrac{n}{2}) - \xi'(k-\tfrac{n}{2}) + \frac{2}{3}\pi^2\right] P(2k-n) \right.$$

$$\left. - \, \xi(k-\tfrac{n}{2}) \, P(2k-n,1) + \frac{1}{2} P(2k-\tfrac{n}{2},2) - \frac{\pi^2}{2} G(2k-n) \right\} \tag{77}$$

$$FG(-2k,1) = \frac{(-1)^{k-\frac{n}{2}}\ \pi^{2k-\frac{n}{2}-1}}{(k-\frac{n}{2})!\ \ (k-1)!} \left\{ \frac{1}{3!} \left[\xi^3(k-\tfrac{n}{2}) + \xi''(k-\tfrac{n}{2})\right.\right.$$

$$\left. - 3\xi(k-\tfrac{n}{2})\ \xi'(k-\tfrac{n}{2}) + 2\pi^2\xi(k-\tfrac{n}{2})\right]\ P(2k-n)$$

$$- \frac{1}{2}\left[\xi^2(k-\tfrac{n}{2}) - \xi'(k-\tfrac{n}{2}) + \frac{2}{3}\pi^2\right]\ P(2k-n,1)$$

$$+ \frac{1}{2}\ \xi(k-\tfrac{n}{2}) - P(2k-n,2) - \frac{1}{3!}\ P(2k-n,3)$$

$$\left. - \frac{\pi^2}{2}\ \xi(k-\tfrac{n}{2})\ G(2k-n) + \frac{\pi^2}{2}\ G(2k-n,1)\right\} . \qquad (78)$$

d) $p = -2k$, n pair et $k \leq \frac{n}{2}$. On trouve alors

$$\frac{FG(-2k,m)}{m!} = - \frac{(-1)^{k-1}\ (\frac{n}{2}-k-1)!}{(k-1)!\ \pi^{\frac{n}{2}-2k+1}} \left\{ (-1)^{\frac{n}{2}-1}\ a^m_{-1}\ (A_{\frac{n}{2}-k-1} - \bar{A}_{\frac{n}{2}-k-1}) \right.$$

$$+ (-1)^k\ d^m_{-1}\ (-1)^{\frac{n}{2}-k}\ A_{\frac{n}{2}-k-1} + \sum_{t=0}^{m+1} \frac{(-1)^t}{t!} \left[(-1)^{\frac{n}{2}}\ a^m_t\ S_+(2k-n,t) \right.$$

$$\left.\left. + (-1)^k\ d^m_t\ G(2k-n,t)\right]\right\} = \qquad (79)$$

$$\frac{(\frac{n}{2}-k-1)!}{(k-1)!\ n^{\frac{n}{2}-2k+1}} \left\{ \frac{-b^m_{-1}}{(\frac{n}{2}-k-1)!}\ H_+^{\frac{n}{2}-k-1}\right.$$

$$\left. + \sum_{t=0}^{m+1} \frac{(-1)^t}{t!} \left[a^m_t\ P(2k-n,t) + b^m_t\ G(2k-n,t)\right]\right\} \qquad (80)$$

On en tire

$$FG(-2k) = \frac{(\frac{n}{2} - k - 1)!}{(k-1)!\pi^{\frac{n}{2} - 2k + 1}} \left\{ \eta(-k)\ P(2k-n) - P(2k-n,1) + \frac{\pi^2}{2(\frac{n}{2} - k - 1)!} H_+^{\frac{n}{2}-k-1} \right\} \tag{81}$$

$$FG(-2k,1) = \frac{(\frac{n}{2} - k - 1)!}{(k-1)!\pi^{\frac{n}{2} - 2k+1}} \left\{ \frac{\pi^2\ \eta(-k)}{2(\frac{n}{2} - k - 1)!} H_+^{\frac{n}{2} - k - 1} \right.$$

$$+ \frac{1}{2} \left[\eta^2(-k) - \eta'(-k) + \frac{\pi^2}{3}\right] P(2k-n) - \eta(-k)\ P(2k - \frac{n}{2}, 1)$$

$$\left. + \frac{1}{2} P(2k-n,2) - \frac{\pi^2}{2} G(2k-n) \right\} \tag{81}$$

pour n **pair** et $k < \frac{n}{2}$.

e) $p = -2k$, n impair

$$\frac{FG(-2k,m)}{m!} = - \frac{\Gamma(\frac{n-2k}{2})}{(k-1)!\pi^{\frac{n}{2} - 2k + 1}} \sum_{t=0}^{m+1} \frac{(-1)^t}{t!} d_t^m\ G(2k-n,t) \tag{82}$$

$$FG(-2k) = - \frac{\Gamma(\frac{n-2k}{2})}{(k-1)!\ \pi^{\frac{n}{2} - 2k + 1}} \left\{ \eta(-k)\ G(2k-n) - G(2k-n,t) \right\} \tag{83}$$

$$FG(-2k,1) = - \frac{\Gamma(\frac{n-2k}{2})}{(k-i)!\ \pi^{\frac{n}{2} - 2k + 1}} \left\{ \frac{1}{2} \left[\eta^2(-k) - \eta'(-k) - \frac{2}{3}\pi^2\right] G(2k-n) \right.$$

$$\left. - \eta(-k)\ G(2n-k,1\ ) \right\} \tag{84}$$

f) $p = -n-2r$, n impair. Si l'on remplace (4.4-d) par

$$\cos \pi\left(\frac{-n-2r}{n} + A\right) = (-1)^{\frac{n+2r-1}{2}} \sin \pi\lambda = (-1)^{\frac{n+2r-1}{2}} \sum_{u=0}^{\infty} \frac{(-1)^u \pi^{2u+1} A^{2u+1}}{(2u+1)!} \tag{85}$$

on obtient, par la règle usuelle,

$$\frac{FG(-n-2r,m)}{m!} = -\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{2-n-2r}{2}\right) \pi^{\frac{n}{2}+2r-1}}{r!} \sum_{t=0}^{m+1} \frac{(-1)^t}{t!} c_t^m \; G(2r,t) \tag{86}$$

ce qui donne

$$FG(-n-2r) = \frac{(-1)^{n+1} \Gamma\left(\frac{2-n-2r}{2}\right) \pi^{\frac{n}{2}+2}}{r!} G(2r) = \frac{(-1)^{r-1} \pi^{\frac{n}{2}+2r+1}}{r! \, \Gamma\left(\frac{n+2r}{2}\right)} G(2r) \tag{87}$$

et, finalement,

$$FG(-n-2r,1) = \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}} \Gamma\left(\frac{2-n-2r}{2}\right) \pi^{\frac{n}{2}+2r}}{r!} \{ \zeta(r) \, G(2r) - G(2r,1) \}$$

$$= \frac{(-1)^{r-1} \pi^{\frac{n}{2}+2r+1}}{r! \, \Gamma\left(\frac{n+2r}{2}\right)} \{ \zeta(r) \, G(2r) - G(2r,1) \} \tag{88}$$

$\zeta(r)$ dénotant le numéro $\psi(r+1) + \psi\left(\frac{2-n-2r}{2}\right) - 2 \log \pi$

OUVRAGES CITES

1. L.Schwartz, Théorie des distributions, I et II, Paris, 1950.
2. P.D.Methée, Sur les distributions invariantes dans le groupe des rotations de Lorentz, Comment. Math. Helv. 28 (1954).
3. P.D.Methée, Transformées de Fourier de distributions invariantes liées à la résolution de l'équation des ondes, Colloque International du C.N.R.S., Nancy, 1956; C.R. de l'Ac. des Sc., t.240 (1955) et t.241 (1955).
4. A.Erdélyi, Higher transcendental functions, vol I McGraw - Hill Book Company, (1953).