

## Solitons

JARBAS LOPES CARDOSO JÚNIOR\*

*Instituto de Física, Universidade Estadual de Campinas, 13100 Campinas, SP.*

Recebido em 24 de Agosto de 1979; versão revista recebida em 29 de Abril de 1980

A review is given of recent developments in nonlinear waves studies, particularly in soliton-like phenomena. The "soliton" is defined as a "great solitary wave" highly stable (the instability due to the nonlinearity of the wave is balanced by the dispersive effect of the medium). The historical development of the "soliton" concept is presented in the first part of this paper. In the second part, the nonlinear wave equations that describe the most important types of solitons are discussed. Among them the Korteweg-de Vries, sine-Gordon and nonlinear Schrödinger equations. Finally, the characteristic and practical applications of various kinds of solitons are presented. Some examples in various branches of Physics and Engineering are shown.

É feita uma revisão do desenvolvimento atual do estudo das ondas não lineares, particularmente em fenômenos do tipo "soliton". "soliton", é definido como uma "grande onda solitária", altamente estável (a instabilidade devida a não linearidade da onda é compensada pelo efeito dispersivo do meio). O desenvolvimento histórico do conceito soliton é apresentado na primeira parte deste trabalho. Na segunda parte, discutimos as equações de onda não linear que descrevem os mais importantes tipos de solitons. Entre eles temos as equações de Korteweg-de Vries, sine-Gordon e a de Schrödinger não linear<sup>1</sup>. Finalmente apresentamos as características e aplicações práticas de vários tipos de solitons. São mostrados exemplos em diversos ramos da Física e Engenharia.

---

\* Bolsista da FAPESP, São Paulo, Brasil.

\*\* Endereço atual: Centro Técnico Aeroespacial, IAE, DEA, 12200 São José dos Campos, SP.

## APRESENTAÇÃO

"Soliton" é o nome dado a certos tipos de fenômenos ondulatórios não lineares e altamente estáveis, também chamados de "ondas solitárias".

O grande número de publicações científicas e, até mesmo de conferências internacionais mostram que, atualmente, os "solitons" estão em grande evidência nos meios científicos. Fala-se até em "nascimento da Física não linear".

Este trabalho tem por objetivo dar uma visão geral do conceito de "soliton" e para tal, faz-se uso de diversos exemplos e aplicações em experimentos da "Física Moderna", "Física Clássica" e em diversas outras áreas da ciência, bem como algumas aplicações tecnológicas (como, por exemplo a sua utilização na construção de memórias eletrônicas).

A idéia é procurar explicar o que é um "soliton" de uma forma didática sem se aprofundar na linguagem matemática. A parte inicial do trabalho mostra o desenvolvimento histórico dos estudos em hidrodinâmica, particularmente nos fenômenos não lineares, estudos esses que já no século XVIII motivaram os pesquisadores. É importante dizer que naquela época os transportes e as comunicações eram feitos, basicamente, por vias navegáveis, daí a existência de inúmeros estudos visando a otimização desses serviços. Os rios, lagos e canais de navegação eram importantes "laboratórios científicos".

Além da parte histórica, discute-se de forma sucinta a parte analítica, procurando mostrar os diversos tipos de equações não lineares que podem descrever os fenômenos do tipo "soliton". Embora essa parte seja sucinta procurou-se dar uma noção geral dos aspectos matemáticos envolvidos nesses fenômenos. São dados diversos exemplos e aplicações físicas para cada equação descrita. Acompanham o artigo diversas referências específicas que servem não só para um estudo mais profundo como também para mostrar a variedade de trabalhos realizados sobre esse tema na Física de hoje.

# 1. HISTÓRICO

## 1.1. Introdução

A utilização dos canais de navegação, principalmente na Europa, se desenvolveu devido às necessidades do comércio e das comunicações. Tem-se notícia que desde o século XVI já se *construíam* esses canais. Tais canais foram importantes "laboratórios de pesquisas", durante todo esse tempo. Não só pelos problemas tecnológicos apresentados com também pelo desenvolvimento da Hidrodinâmica. Benjamin Franklin<sup>1</sup> foi um dos primeiros a se interessar pelos problemas de hidrodinâmica causados pelo movimento dos barcos. Vejamos alguns trechos mais importantes de uma de suas cartas a Jean Pringle, comerciante e dono de barcos (Londres, 10 de maio de 1768), sobre a profundidade dos canais de navegação:

"... Um barco em movimento, próximo à margem do canal, à medida em que avança um espaço igual ao seu próprio comprimento, desloca uma quantidade de água igual ao volume ocupado por ele próprio.

"A água assim deslocada, passa à direita, à esquerda e sob o fundo do barco, para depois colocar-se atrás do barco. Se a passagem sob o barco é diminuída pelo fundo, esse processo se repete porém, o movimento da água nos lados do barco é mais intenso, fazendo com que o movimento do barco seja mais difícil".

D'Alembert, Condorcet e Bossut<sup>1</sup>, por volta de 1777, realizaram as primeiras experiências controladas sobre dinâmica dos fluidos. Algum tempo depois, Lagrange<sup>2</sup> desenvolveu uma análise matemática da propagação de ondas de fraca amplitude na superfície de um fluido. Entretanto, foi no século XIX que a pesquisa em propagação de movimentos em meios elásticos obteve um grande desenvolvimento. Entre outros, Poisson, Laplace, Cauchy, Boussinesq e Saint-Venant, foram as principais figuras desse desenvolvimento.

Nesse mesmo século, um novo e interessante fenômeno foi descoberto. Esse fenômeno, chamado de onda solitária pelo seu descobridor, e mais tarde de onda de translação, é uma onda de grande amplitude e altamente estável, produzida em um canal pouco profundo.

Foi em agosto de 1834 que um engenheiro e filósofo natural escocês, John Scott Russel (1808-1882), descobriu as ondas solitárias. Como engenheiro, ele estava preocupado, essencialmente, na importância da formação das ondas devido à resistência ao movimento dos barcos bem como na dedução de cascos ideais para navios.

Uma descrição analítica desse tipo de onda de grande amplitude foi feita em 1869 por Boussinesq e aperfeiçoada por Saint-Venant em 1885. Na época, houve um grande debate a respeito da estabilidade das soluções não lineares das equações de propagação. Esse debate foi concluído em 1895 com a resolução exata obtida por Korteweg-de Vries<sup>3</sup>. De lá para cá, até o início da década de 60, praticamente não houve nenhuma nova contribuição ao estudo dos movimentos do tipos de ondas solitárias. Mas, a partir daí, o fenômeno do tipo onda solitária, ou soliton, como é chamado atualmente, tem sido observado em inúmeros ramos da Física Clássica bem como da Física Moderna.

## 1.2. A Descoberta

Durante aproximadamente um século observaram-se fenômenos do tipo onda solitária sem estudos aprofundados. Lagrange<sup>2</sup> estudou a equação de propagação de ondas na superfície de um canal raso e de secção retangular. Se  $H$  é a altura de água do canal e  $g$  a aceleração da gravidade a velocidade de propagação é dada por:

$$v = \sqrt{gh} \quad (1.2.1)$$

resultado obtido através de um cálculo aproximado. Essa aproximação supõe que os termos não lineares sejam desprezíveis. Esta linearização descreve perturbações de pequena intensidade. Daí podemos dizer que ondas de grande amplitude correspondem a propagações não lineares. Entretanto, com a aplicação da equação de Lagrange a este tipo de propagação podemos observar alguns efeitos não lineares. Seja uma onda na superfície de água de um canal raso (com profundidade  $H$ ), com amplitude máxima  $h$ . A altura da água varia, conforme o perfil da onda, entre dois extremos:  $H+h$  para a crista e  $H-h$  para o vale. Ora, na fórmula de Lagrange, a velocidade de propagação da onda depende da altura de água então, a velocidade de propagação da crista tende a ser maior que a do vale. Des-

se modo, a onda muda sua forma no decorrer da propagação, adquirindo uma forma mais abrupta na frente e mais suave atrás (tipo onda do mar).

Entretanto a descoberta da onda solitária veio de uma observação de John Scott Russel<sup>4</sup>: "Eu observava o movimento de um barco que dois cavalos rebocavam através de um canal raso e estreito, quando, de repente, o barco parou; entretanto o movimento continuou pela água do canal, a água foi se acumulando, em um estado de intensa agitação, ao redor do barco e daí, jogando o barco para trás, espalhou-se, ao longo do canal, com grande velocidade, assumindo a forma de uma grande ondulação solitária, cuja superfície circular e plana é perfeitamente definida. Esta onda continuou sua marcha pelo canal, sem que sua forma ou mesmo sua velocidade se alterassem, pelo menos aparentemente. Continuando a cavalo, segui a onda que se movia de 8 a 9 mi/h, preservando sua forma original (uns 30 pés de comprimento e 1 pé a 1,5 pé de altura). A altura da onda foi gradualmente diminuindo e após uma perseguição por uma ou duas milhas eu a perdi na sinuosidade do canal. Assim, em agosto de 1834, foi o meu primeiro encontro com esse fenômeno estranho e bonito".

O que Russel viu foi um "soliton" embora esse nome tenha sido adotado em 1965, quando então, o fenômeno foi redescoberto em uma solução numérica de equação de onda de plasma<sup>5</sup>. Alguns anos depois da descoberta de Russel, encontramos outra apresentação, igualmente simples, desse fenômeno, feita por M. Bazin, em 1865<sup>6</sup>. Vejamos o que ele disse:

"Toda vez que um volume de água momentaneamente se eleva acima do nível geral, e esse volume se propaga sem alteração, trata-se então, de uma onda de translação. Esta elevação momentânea pode ser produzida seja pelo movimento de uma barra, agitando à maneira de um pistão, em um líquido, seja pela ejeção de um certo volume de água sobre um líquido tranquilo, etc.

"A onda de translação é toda a saliência solitária acima do nível de água na qual ela se propaga; aqui aparece uma das diferenças entre as ondas oscilatórias, pois nesse caso, cada saliência é acompanhada por uma cavidade correspondente. Ainda mais, as ondas oscilatórias estão sempre reunidas por grupos e se sucedem a intervalos regula-

res; a onda de translação caminha só. Russel, a quem devemos os primeiros estudos sobre esse fenômeno, denominou-o de onda solitária, que é aplicado atualmente a uma translação particular que tem a propriedade de se propagar sem se deformar".

Nessa época, os transportes e as comunicações eram basicamente feitos por vias navegáveis (mar, rio, canal, etc.); os pesquisadores eram motivados a resolver os problemas das vagas devidas aos movimentos de navios, bem como a projetar tipos adequados de cascos. Podemos ter uma idéia disso, através das palavras de Saint-Venant<sup>7</sup>: "... os sábios comissários ingleses esperavam, pelo estudo de ondas em canais, adquirir úteis conhecimentos sobre as leis das ondas do mar sobre as quais os navios balançavam". Note que nessa época a Inglaterra, praticamente, detinha o monopólio dos transportes marítimos do mundo: possuía a maior frota mercante, bem como a maior e melhor equipada marinha de guerra.

Contudo devemos a Russel, não só a descoberta, como também as primeiras tentativas de desenvolvimento de fórmulas empíricas para descrever o fenômeno do tipo onda solitária. Realizou numerosas observações experimentais importantes, dentre as quais sobressai a experiência em que ele próprio produziu ondas solitárias e observou, em recipientes de paredes transparentes, os caminhos percorridos por pequenos corpos em suspensão no líquido. No fundo dos recipientes, as trajetórias desses corpúsculos eram retas e horizontais, mas nas proximidades da superfície, as trajetórias curvavam-se de uma maneira análoga a uma semi-elipse.

Boussinesq<sup>8</sup>, em 1877, desenvolveu um tratamento analítico do movimento de partículas à passagem da onda. Em 1885, Saint-Venant<sup>7</sup>, aperfeiçoando esse tratamento analítico, escreveu que o movimento formava um arco de parábola e não o de semi-elipse como observaram Russel e Boussinesq.

## 2. SOLITONS

### 2.1. Efeito Mão Linear e Díspeasivo

Ondas solitárias são soluções das equações não lineares de ondas dispersivas que se propagam ao longo de uma direção particular sem mudança de sua forma. A não linearidade, por si só, tende a instabilizar a forma da onda, mas esse efeito é contrabalançado pela dispersão causada pelo meio. De fato, a correção não linear tende a fazer com que o perfil da onda tenha um caráter mais abrupto na frente e ligeiramente mais suave atrás (Lagrange). Esse fenômeno atualmente é conhecido como onda de choque. Um exemplo dessa formação de onda é a forma que as ondas do mar adquirem antes de "arrebentarem" na praia.

Temos então, nesse caso, um efeito não linear e dispersivo associado ao fenômeno do tipo onda solitária. Entretanto, a introdução do efeito não linear e dispersivo faz com que surjam coisas mais complicadas, por exemplo, a equação de onda tem um intrincado princípio de superposição de modo que duas diferentes soluções não podem, simplesmente serem adicionadas de modo a obtermos uma terceira solução. As ondas solitárias interagem mutuamente sem criarem ou destruir alguma outra perturbação e continuam com suas formas originais.

Uma resolução analítica exata para esse problema foi feita por Korteweg e de Vries<sup>3</sup> em 1895. Eles apresentaram uma equação que exibe os efeitos não lineares e dispersivos, pela qual se obtém uma família de soluções estacionárias exatas, com uma solução particular de onda solitárias. Ondas solitárias altamente estáveis são os solitons.

Ondas transversais que se propagam em água rasa dão um bom exemplo de propagação não linear e dispersiva e as ondas solitárias que aparecem na solução das equações de movimento correspondem ao fenômeno observado por Russel. Exemplos semelhantes de sistemas não lineares e dispersivos podem ser encontrados em vários ramos da Física: colisões iônicas, acústica, meteorologia, plasma, laser, magnetismo e na teoria das partículas elementares<sup>9</sup>.

## 2.2. Descrição Analítica

### 2.2.1. Equação de Korteweg-de Vries

A equação de Korteweg-de Vries, conhecida também por equação KdV, é dada por<sup>3,10</sup>:

$$\Phi_t + \alpha \Phi \Phi_x + \Phi_{xxx} = 0 \quad (2.2.1 .1)$$

onde,  $\alpha$  é constante.

Esta equação tem se mostrado bastante útil para descrever, mesmo que aproximadamente, diversos fenômenos não lineares e dispersivos. Eis alguns exemplos<sup>9,11,12,13</sup>: ondas magnetohidrodinâmicas e ondas íon-acústicas no plasma, rede anarmônica, ondas longitudinais dispersivas em materiais elásticos, "ondas de pressão" em mistura gás-liquido em tubos, pacotes de fonons excitados termicamente a baixas temperaturas em cristais não lineares, fluidos girantes em um tubo, etc. Em geral, uma grande classe de sistemas matemáticos hiperbólicos podem ser descritos pela equação KdV.

A expressão

$$\Phi = \frac{72}{a} \left\{ \frac{3 + 4\cosh(2x - 8t) + \cosh(4x - 64t)}{(3\cosh(x - 28t) + \cosh(3x - 36t))^2} \right\} \quad (2.2.1.2)$$

descreve uma dupla solução da equação KdV. São essas soluções que descrevem dois solitons interagindo<sup>12</sup>. Aproximando a expressão acima, para grandes  $t$ , obtemos:

$$\Phi = \frac{12k_i^2}{\alpha} \operatorname{sech}^2 \{k_i(x - 4k_i^2 t) + \delta_i\} \quad (2.2.1.3)$$

onde,  $\delta_i$  é constante e  $i = 1, 2$ .

Não se sabe bem o por quê, depois de cerca de 60 anos de intensos debates, a onda solitária caiu em esquecimento. Isso se deu logo após a solução obtida por Korteweg e de Vries, em 1895. De certa maneira, podemos dizer que também a hidrodinâmica em geral caiu em esquecimento. Somente na década de 60 que esse estudo foi revitalizado por Za-

busky e Kruskal que encontraram a solução de onda solitária numa solução numérica de equação de onda de plasma<sup>5</sup>. Nesse trabalho, eles procuraram mostrar que duas ondas solitárias, descritas pela equação KdV, interagem sem se deformarem, ou seja, ao se chocarem preservam suas formas.

### 2.2.2. Ondas Solitárias Descritas pela Equação de Korteweg-de Vries

Seja:

$$\phi(x, t) = \phi(\xi) \tag{2.2.2.1}$$

onde:  $\xi = x - ut$ ; que representa o movimento de uma onda num sistema de coordenadas movendo-se com velocidade  $u$ .

Considerando que:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{d}{d\xi} \tag{2.2.2.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = -u \frac{d}{d\xi}$$

substituímos na expressão (2.2.1.1), obtemos a seguinte equação diferencial:

$$\phi_{\xi} (\alpha\phi - u) + \phi_{\xi\xi} = 0 \tag{2.2.2.3}$$

Integrando essa equação, obtemos:

$$\phi_{\xi\xi} = k_1 + u\phi - \frac{\alpha}{2} \phi^2 \tag{2.2.2.4}$$

onde  $k_1$  é uma constante de integração. Da segunda integração (multiplicamos antes ambos os lados de (2.2.2.4) por  $\phi_{\xi}$ ) resulta:

$$\frac{1}{2} \phi_{\xi}^2 = k_2 + k_1\phi + \frac{u}{2} \phi^2 - \frac{\alpha}{6} \phi^3 \tag{2.2.2.5}$$

onde:  $k_1$  e  $k_2$  são constantes de integração. Na terceira (e última) integração, obtemos:

$$\int_{\Phi_0}^{\Phi} \frac{d\Phi}{\sqrt{P(\Phi)}} = x - ut \quad (2.2.2.6)$$

onde:  $P(\Phi) = 2k_2 + 2k_1\Phi + u\Phi^2 - \frac{\alpha}{3}\Phi^3$  e  $\Phi_0$  é o valor de  $\Phi$  para  $x-ut=0$ .

Como a onda solitária é perfeitamente localizada a primeira e a segunda derivadas devem ir a zero para  $\xi \rightarrow \pm \infty$ . Além disso, essas derivadas são definidas em todo o espaço. Estas condições e mais as expressões (2.2.2.4 e 5) fazem com que  $k_1$  e  $k_2$  (as constantes de integração) sejam iguais a zero. Logo, a expressão (2.2.2.6) pode ser facilmente integrada, fornecendo a solução do tipo onda solitária:

$$\Phi(x - ut) = \frac{3u}{\alpha} \operatorname{sech}^2 \left\{ \frac{\sqrt{u}}{2} (x-ut) \right\} \quad (2.2.2.7)$$

A análise física das equações (2.2.2.6 e 7) nos revelam as seguintes propriedades para um soliton descrito pela equação KdV:

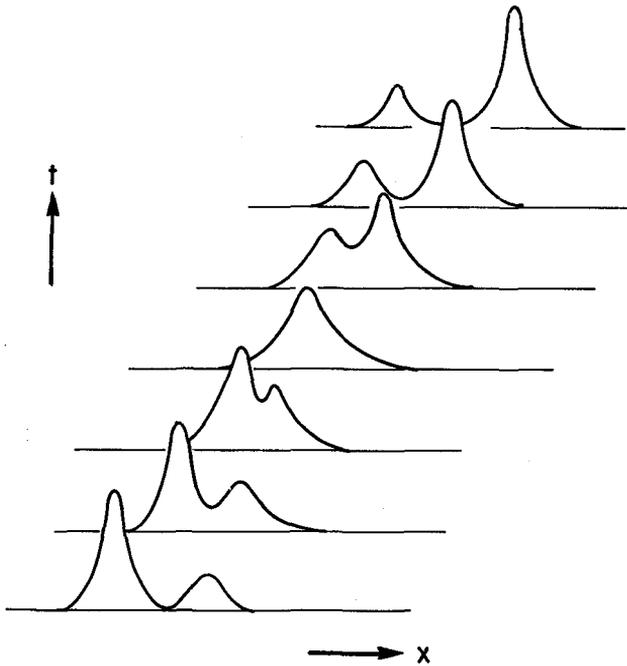
- a amplitude aumenta com a velocidade;
- a largura é inversamente proporcional a raiz quadrada da velocidade;
- o sinal da onda depende do sinal da constante  $\alpha$ ;
- as ondas são unidirecionais, isto é,  $u$  não pode ser negativo, pois,  $\sqrt{P(\Phi)}$  deve ser real.

Podemos dizer que ondas solitárias são solitons, quando após a colisão elas preservarem suas formas<sup>5,12</sup>. As soluções duplas para solitons interagindo são dadas na expressão (2.2.1.2) ou na (2.2.1.3). No próximo ítem, outras soluções duplas serão mostradas.

A colisão entre dois solitons que se propagam em direções opostas pode ser vista na fig.1.

Como vimos na parte 1, a teoria desenvolvida por Korteweg-de Vries foi o resultado de uma evolução das pesquisas científicas na época. Eles desenvolveram uma teoria exata a respeito das soluções de equação não linear e dispersiva, após a obtenção, por Boussinesq, de soluções aproximadas do fenômeno observado por Russel. Assim, em alguns casos, as soluções obtidas por Boussinesq também podem ser aplicadas em alguns ramos da Física<sup>12,14</sup> e com uma vantagem: a equação descreve a

FIGURA 1



Exemplo de interação de dois movimentos do tipo "soliton".

propagação de ondas em ambas as direções ao longo de uma linha, enquanto que, a equação KdV descreve a propagação em apenas uma direção.

Uma discussão mais detalhada sobre o comportamento de solitons descritos pela equação KdV encontra-se na ref. 15.

### 2.2.3. Equação de sine-Gordon

Talvez, a melhor maneira de descrevermos a equação de onda (unidimensional) com soluções do tipo solitons, seja a equação de sine-Gordon<sup>10,11,12,13</sup>:

$$\phi_{xx} - \phi_{tt} = \sin\phi \quad (2.2.3.1)$$

Esta equação é uma particularização da equação de Klein-Gordon:

$$\Phi_{xx} - \Phi_{tt} = F(\Phi) \quad (2.2.3.2)$$

Daí o nome sine-Gordon

A equação de sine-Gordon é invariante por transformação de Lorentz, sendo portanto apropriada para descrever partículas elementares num espaço-tempo bidimensional<sup>12,13</sup>. Contudo, ela pode ser usada para descrever diversos outros fenômenos físicos, como por exemplo: propagação de movimentos de deslocamentos nos cristais, movimento da "parede de Bloch" em cristais magnéticos, teoria unitária das partículas elementares; propagação de um fluxo magnético na junção de Josephson, propagação de uma onda de "deslocamento" ao longo de uma membrana lipídica, transições de fase em cristais unidimensionais<sup>12,13</sup>.

Uma equação do tipo sine-Gordon, apareceu em 1882 em um trabalho de Bäcklund sobre geometria diferencial<sup>17</sup>. Nesse artigo, Bäcklund obteve — o que depois se chamou transformações de Bäcklund — uma solução para multisoliton, somando diversas soluções do tipo soliton, inclusive a "solução zero" ou "vácuo"<sup>10,13,16</sup>. Mas a primeira aplicação na Física apareceu em 1939 em um trabalho de Frenkel sobre deslocamentos em cristais<sup>13</sup>.

As soluções do tipo soliton na equação de sine-Gordon têm a forma:

$$\Phi = 4\arctg \left\{ \exp i \left( \frac{x-ut}{\sqrt{1-u^2}} \right) \right\} \quad (2.2.3.3)$$

quando  $x$  vai de  $-\infty$  a  $+\infty$ ,  $\Phi$  varia de  $2\pi$ . O sinal positivo na exponencial correspondente a uma rotação no sentido anti-horário e, podemos considerar (por convenção), essa onda, como sendo um soliton. Por outro lado, se o sinal for negativo, a rotação se fará no sentido horário e, então, diremos que  $\Phi$  descreve um anti-soliton. Considerando que a rotação total é conservada, a diferença entre o número de solitons e o número de anti-solitons deve ser considerado em qualquer colisão. Isso nos leva a concluir que os solitons são criados e destruídos aos pares. Seager, Donth e Korchendorf<sup>12</sup>, em 1953, usando a expressão

(2.2.3.1) para descreverem a propagação de deslocamentos em cristais, com soluções do tipo (2.2.3.3), obtiveram expressões analíticas para colisões do tipo "soliton-soliton" e "soliton-anti-soliton". As expressões obtidas foram:

$$\operatorname{tg} \frac{\Phi}{4} = \frac{u \operatorname{senh} \left( \frac{x}{\sqrt{1-u^2}} \right)}{\operatorname{cosh} \left( \frac{ut}{\sqrt{1-u^2}} \right)} \quad (2.2.3.4)$$

para colisões do tipo "soliton-soliton"; e

$$\operatorname{tg} - \frac{\Phi}{4} = \frac{\operatorname{senh} \left( \frac{ut}{\sqrt{1-u^2}} \right)}{u \operatorname{cosh} \left( \frac{x}{\sqrt{1-u^2}} \right)} \quad (2.2.3.5)$$

para colisões do tipo "soliton-anti-soliton". Mais tarde, em 1962, essas expressões foram novamente obtidas, desta vez por Perring e Skyrme<sup>18</sup>, que tratou-as como sendo interações do tipo "partícula-partícula" e "partícula-anti-partícula". Um fato extremamente interessante é que nessa teoria uma partícula e uma anti-partícula cruzam-se sem se destruírem.

Como exemplo de aplicação da equação de sine-Gordon, vamos mostrar umas primeiras aplicações, que como já comentamos, refere-se ao movimento das deslocações nos sólidos. Seja, para simplificar, um cristal bidimensional, suficientemente grande, formado por arranjos de átomos alinhados. Sejam dois arranjos consecutivos. Naturalmente, a tendência deles é de atingir a configuração de menor energia, que é obtida quando os átomos desses arranjos estão em fase; considerando que os dois arranjos são infinitos, o deslocamento de um comprimento igual à distância entre os átomos do arranjo faz com que esses adaptem-se a nova situação através de uma configuração equivalente. Existem, desse modo, uma infinidade de posições estáveis equivalentes. Entretanto, examinando-se cuidadosamente o cristal, encontramos defeitos localizados como por exemplo: somente um arranjo no lugar de um par deles; Nesse caso, então, o deslocamento produzido pode acarretar outros tipos de configurações. Pode-se fazer, então um modelo simplificado que des-

creve os defeitos periodicamente, defeitos esses que fornecem as características de elasticidade e plasticidade dos materiais. Nesse modelo, a dinâmica das deslocções é descrita pela equação de sine-Gordon<sup>11,12</sup>.

Uma importante característica da equação de sine-Gordon e dos fenômenos que ela descreve é a de existir, associado a cada soliton, um número inteiro positivo ou negativo, igual ao número de rotações completas. Este número inteiro associado a uma onda do tipo soliton é uma quantidade conservada; quando dois solitons se superpõem para formarem um só, o novo número é a soma dos dois primeiros. Um soliton pode ter qualquer número inteiro positivo ou negativo. Assim sendo, podemos somar e subtrair com os solitons, o que nos leva a pensar que eles podem ser utilizados em calculadoras eletrônicas. Para tal caso vamos citar um exemplo desse tipo de aplicação: a construção de uma memória eletrônica utilizando uma junção de Josephson longa e estreita: a informação é transmitida por um "turbilhão quântico", isto é, um fluxo quântico através de um anel de corrente contínua. A dinâmica desse "turbilhão" é descrita pela equação de sine-Gordon. Veremos em (2.3) uma descrição detalhada desse fenômeno.

#### 2.2.4. Equação de Schrodinger Não Linear

No estudo dos fenômenos não lineares foi obtida, em 1971, por Zakharov e Shabat<sup>12,13</sup>, uma solução exata, analítica, para a equação não linear de Schrödinger. Essa equação é dada por:

$$\phi_{xxx} + i\phi_t + k|\phi|^2\phi = 0 \quad (2.2.4.1)$$

onde  $\phi$  pode assumir valores complexos.

Sua forma clássica tem se mostrado suficiente para descrever inúmeros fenômenos físicos: auto-modulação unidimensional de onda monocromática; propagação de um pulso de calor em um sólido; equação de Ginzburg-Landau de supercondutividade; auto-focalização bidimensional de onda plana estacionária; ondas de Langmuir no plasma; fenômenos de auto-destruição em óptica não linear<sup>12</sup>. Contudo a quantização da equação de Schrödinger não linear foi obtida por Kaup<sup>19</sup>, em 1975, para

uma dimensão, marcando um grande progresso nessa área. Um bom exemplo de aplicação da equação (2.2.4.1) é o de ondas transversais em águas rasas<sup>13</sup>.

Uma interessante solução dessa equação é o chamado "pacote de solitons", que é dado por<sup>10 12</sup>

$$\Phi = \Phi_0 \operatorname{sech} \left\{ \sqrt{\frac{k}{2}} \Phi_0 (x - u_e t) \right\} \exp \left\{ i \left( \frac{u_e}{2} \right) (x - u_c t) \right\} \quad (2.2.4.2)$$

onde:  $u_e$  é a "velocidade do pacote" e  $u_c$  é a "velocidade do portador", sendo que  $u_e > 2u_c$ . Essa solução, o "pacote de solitons", pode ser interpretado como sendo uma solução do tipo multisoliton obtido pela equação KdV e/ou pela equação de sine-Gordon.

Um bom exemplo da utilização do pacote de solitons é dado por um cálculo teórico sobre um guia de ondas de vidro que transporta o "pacote de solitons" da equação (2.2.4.2), a uma potência da ordem de 1W. Dados de simulação indicam que tais pulsos são estáveis sob diversos tipos de influência: pequenas e grandes perturbações, ruídos, ou mesmo, estáveis à absorção em distância maiores que 1km<sup>12</sup>. Este resultado, embora teórico, proporciona um grande estímulo no estudo das fibras óptica? como transmissores de informações.

### 2.3. Conclusões, Características e Exemplos de Solitons

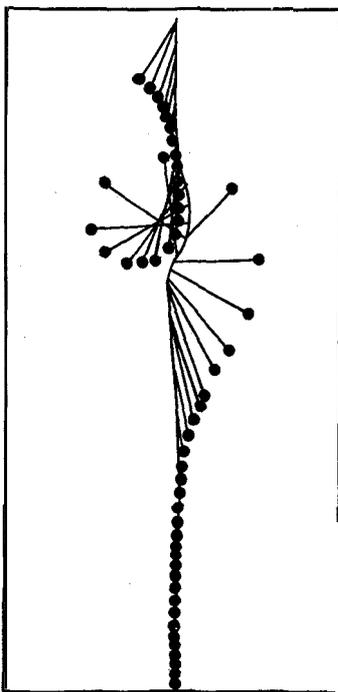
Conforme podemos ver, existem tipos de equações não lineares que podem descrever melhor certos fenômenos físicos do que outras equações. Assim podemos separar, por classes (de acordo com as características intrínsecas a cada equação que pode descrever a dinâmica do sistema) os diversos fenômenos não lineares e dispersivos.

Por exemplo, a equação KdV permite descrever, perfeitamente bem um grande número de fenômenos não lineares nos diversos ramos da física. Tais fenômenos constituem uma classe que tem uma propriedade comum: a pouca dispersão para grandes comprimentos de ondas isto é, para perturbações que variam muito lentamente no espaço e a velocidade das ondas de pouca amplitude tende a ser constante.

Uma outra grande classe de fenômenos não lineares e dispersivos pode ser ilustrada pelo comportamento de um arranjo de pêndulos acoplados, com grande oscilação. Este exemplo nos conduz a um outro tipo de equação não linear e dispersiva, a equação de sine-Gordon, que permite descrever fenômenos não lineares nos mais diversos ramos da Física.

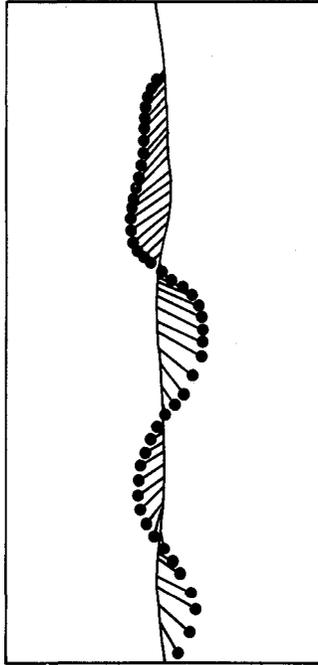
Na Física clássica, o arranjo de pêndulos da Fig. 2 é um bom exemplo de solitons. Esse arranjo é formado por diversos pêndulos rígidos que estão ligados entre si apenas por um arame de aço. Os pêndulos em equilíbrio repousam verticalmente. No tratamento didático u-

FIGURA 2



Arranjo de pêndulos acoplados com grande oscilação. Exemplo de um movimento do tipo "soliton".

FIGURA 3



Arranjo de pêndulos acoplados com pequena oscilação. Exemplo de propagação de uma onda linear.

sual, sobre a teoria do pêndulo simples, considera-se apenas pequenas oscilações Fig. 3, tal que as equações de movimento possam ser consideradas lineares. Desde Galileu, sabe-se que a frequência para pequenas oscilações independe da amplitude. A equação tem a forma:

$$\ddot{\phi} = -\phi \quad (2.3.1)$$

Para grandes oscilações, a aproximação linear não mais satisfaz a equação de movimento (entre outras coisas, a frequência depende da amplitude). Se fornecemos suficiente energia para que o pêndulo efetue um semi-círculo, ele atinge então, uma nova posição de equilíbrio porém, bastante instável, pois, o corpo do pêndulo está aci-

ma do arame. Quando o impulso ultrapassa esse valor crítico, o pêndulo fica girando regularmente ao redor do eixo. No girar, o pêndulo torce o arame e desse modo a perturbação se propaga para todos os outros pêndulos. A equação de movimento tem a forma:

$$\Phi_{tt} = - \text{sen } \Phi \quad (2.3.2)$$

Essa transmissão de movimento através do arame de aço, que chamamos de "torção", pode se propagar em qualquer direção ao longo do arame, dando "torções", bem como "anti-torções". Essa perturbação se propaga sem se dispersar como uma grande onda solitária em um canal.

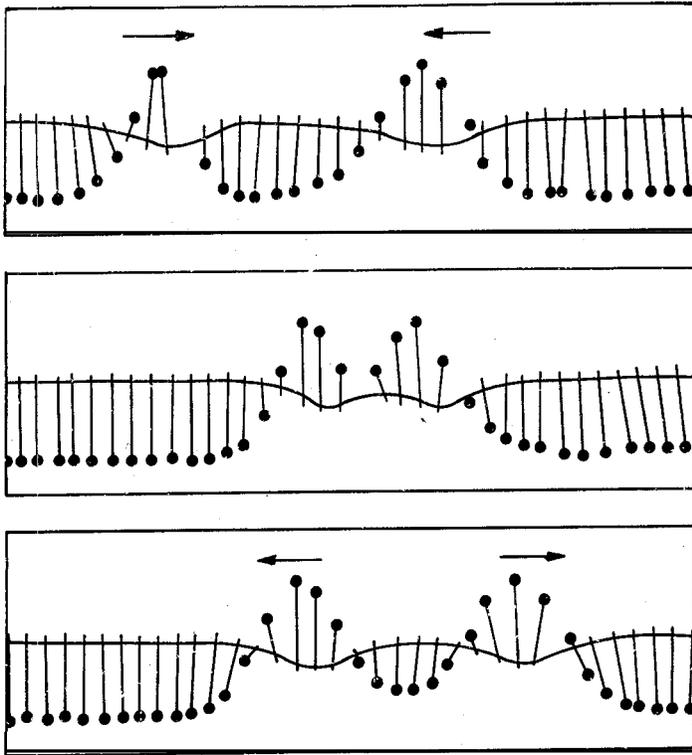
Como já dissemos, dois solitons podem se cruzar sem se deformarem. As soluções da equação de sine-Gordon mostram esse fato. Como ilustração, fazendo uso do mesmo arranjo de pêndulos, podemos ver na fig. 4 a interação de dois movimentos do tipo soliton.

Um efeito semelhante é encontrado no estudo do ferromagnetismo, mais precisamente, nas "paredes de Bloch" que separam os domínios de magnetização<sup>13</sup>. Quando uma das configurações estáveis de spin é perturbada, ocorre também uma alteração das relações entre os spins de direção oposta e, desse modo, a perturbação é transmitida através do material ferromagnético Fig.5. Estas perturbações percorrendo direções opostas podem produzir pares de "torções" e "anti-torções" do tipo soliton. Os efeitos dessas observações têm sido observados na espectroscopia.

Um outro bom exemplo de aplicação dos solitons é dado pelo chamado "turbilhão quântico" na junção de Josephson<sup>11</sup>, que consiste em descrever o movimento de um fluxo magnético quantificado.

Sabemos que as principais características de um material supercondutor são de ter resistência nula (a baixas temperaturas) e ausência de campo magnético em seu interior. Há, porém, certos supercondutores, chamados de supercondutores de segunda espécie que têm uma característica importante: permitem que um campo magnético penetre em seu interior sob a forma de uma "linha de turbilhão quantificado" que se acumula no centro do material, criando anéis de supercorrente que

FIGURA 4

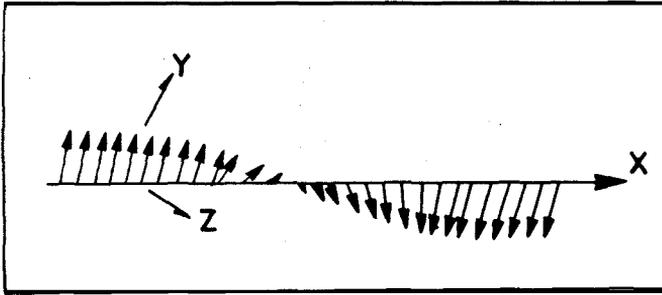


Arranjo de pêndulos acoplados mostrando dois movimentos do tipo "soliton" que interagem sem se deformarem.

produzem uma blindagem no campo magnético. Associamos a esse turbilhão um fluxo quântico e o movimento desse fluxo é descrito por uma equação do tipo sine-Gordon. Nesse caso, a junção de Josephson é longa e estreita de modo a podermos tratar a propagação do fluxo unidimensionalmente e pode-se mostrar que essa propagação é do tipo soliton. Esta linha de turbilhão é utilizada como fonte de informação nas memórias eletrônicas propostas por P.W. Anderson em 1970 e realizadas por Fulton e Dunkleberger, em 1973 <sup>11,13</sup>.

Consideremos dois supercondutores separados por uma peque-

FIGURA 5



Configuração de spin do tipo "Parede de Bloch".

A perturbação  $\vec{e}$  é transmitida através de um movimento do tipo "soliton".

na barra de Óxido, da ordem de um milímetro. Josephson mostrou, em 1962, que uma corrente pode atravessar o Óxido por "efeito túnel", com a tensão nula nas bordas do material<sup>11,20</sup>. Acima de um certo valor da corrente, que chamamos de corrente crítica, o campo magnético associado a essa corrente penetra, sob a forma de turbilhão quântico, no óxido. Uma tensão induzida aparece nas bordas da junção. Esse turbilhão se propaga ao longo do "canal" formado pelo óxido e, dessa maneira, podemos guardar a informação. Obtém-se assim, uma memória muito rápida (tempo de comutação é da ordem de  $10^{-11}$ s) e de baixo consumo de energia (da ordem de  $10^{-18}$  j por operação)<sup>20</sup>.

As propriedades de sobrevivência dos solitons às colisões são importantes no que se refere às condições de reflexão sobre as bordas estreitas da junção bem como no caso de haver mais de um soliton em uma mesma junção. Podem ocorrer, na junção, efeitos perturbativos que provocam correções na equação de sine-Gordon, e, dependendo dessas correções as propriedades dos solitons podem desaparecer.

Diversos outros exemplos, alguns gerais, outros mais específicos, podem ser encontrados nas várias referências mencionadas.

Já existe muita especulação quanto à função do soliton na

**Física de partículas.** Porém, a difícil tarefa de obter soluções tipo soliton em três dimensões, e o obstáculo maior de quantizá-las, ainda não nos permitem perceber com clareza qual o verdadeiro papel que as ondas solitárias poderiam ter nessa área da Física. Contudo os solitons proporcionam aos físicos teóricos um conceito adicional com diferentes tipos de contribuições à teoria quântica de campos, e também estimulam o desenvolvimento de métodos que possam superar as limitações técnicas dessa teoria. Mesmo para a engenharia essas idéias têm-se mostrado bastante férteis (turbilhão nas junções de Josephson por exemplo). Existem inúmeros outros ramos, como por exemplo: Biofísica, Geofísica, etc., nos quais, usam-se solitons no desenvolvimento de modelos teóricos<sup>22</sup>.

## REFERÊNCIAS

1. D'Alembert, Condorcet e Bossut in *Nouvelles experiences sur la resistance des fluides*, Paris, 1777, citam a experiência de B. Franklin e a repetem em "laboratório"; são as primeiras experiências controladas, sobre dinâmica dos fluidos, que se tem notícia.
2. Lagrange in *Traité de mécanique analytique*, Paris, 1788.
3. D.J.Korteweg, G.de Vries, *Phyl.Mag.*, 39, 422 (1895).
4. J.S.Russel, *Proc.Roy.Soc.*, Edinburgh, 319 (1844).
5. N.J.Zabusky, M.D.Kruskal, *Phys.Rev.Lett.*, 15, 240 (1965).
6. M.Bazin in *Recherches expérimentales sur la propagation des ondes*, Paris, 1865.
7. Saint-Venant, *C.R.Acad.Sc.*, 101, 1101 (1885).
8. J.Boussinesq in *Essai sur la théorie des eaux courantes*, Paris, 1877.
9. Cern Courier, 18, 124 (1978).
10. G.B.Whithan, *Linear and nonlinear waves*, John Wiley, New York, 1974.
11. A.Libehaber, G.Toulouse, *La Recherche*, 7, 1027 (1976).
12. A.C.Scott, F.Y.F.Chu, D.W.McLaughlin, *Proc. IEEE*, 61, 1443 (1973).
13. R.K.Bullough, *Phys.Bull.*, 29, 78 (1978).
14. H.Ikezi, R.J.Taylor, R.D.Baker, *Phys.Rev.Lett.*, 25, 11 (1970); D. B. Cohn, K.R.Mackenzie, *Phys.Rev.Lett.*, 30, 258 (1973).
15. R.C.Davidson, *Methods in nonlinear plasma theory*, Academic Press, N.Y. 1972.

16. Y.H.Schikama, M.Wadati, preprint, Nagoya Univ., IPPJ 283, (1977).
17. A.V.Bäcklund, Math. Ann., 19, 387 (1882).
18. J.K.Perring, T.H.R. Skyrme, Nucl. Phys., 31, 550 (1962).
19. D.J.Kaup, J.M. Phys., 16, 2036 (1975).
20. F.Guyon, La Recherche, , 618 (1975).
21. G.R.Lamb Jr., Phys. Rev. Lett., 37, 235 (1976); V.G.Makhnkov, G. Kummer, A.B.Shvochka, preprint of Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, URSS, 1978.
22. International Conference on Extend Systems in Field Theory, USA, 1976. Soliton Conference, Tucson (Arizona), USA, 1976. International Conference on Mystery of Solitons, Poland, 1977. International Symposium "Soliton and their usage in science and technique, Heteborg (Sweden), 1978. Symposium of the Division of Fluid Dynamics: The solitary waves: a unifying in Physics - Bull. Am Phys. Soc., 23, 89 (1978).