Revista Brasileira de Física, Vol. 10, Nº 3, 1980

O Problema de Três Corpos Não Relativístico com Potencial da Forma $K_1 r^n + K_2/r + C$

EDGARDO GERCK* e AUGUSTO BRANDÃO d' OLIVEIRA

Centro Teórico Aeroespacial, Instituto de Atividades Espaciais,
Divisão de Estudos Avançados, 12200 São José dos Campos, SP

Recebido em 10 de Janeiro de 1979; versão revista recebida em 22 de Agosto de 1979

In this work it is presented a study of the bound state of three particles. It is used the non-relativistic quantum mechanical formalism, here applied to potentials of the form

$$K_1 r^n + \frac{K_2}{r} + C \ .$$

Apresenta-se um estudo de estados ligados de três partículas, dentro de um formalismo quântico, não relativístico, aplicável a potenciais de interação do tipo

$$K_1 r^n + \frac{K_2}{r} + C \ .$$

1. INTRODUÇÃO

Um trabalho recente[1] mostrou que o sistema do charmônio pode ser descrito razoavelmente por um potencial do tipo

$$V(r) = K_1 r^n + \frac{K_2}{r} + C \tag{1}$$

onde $n = 1/2$.

Este resultado motivou a investigação de sua aplicabilidade a sistemas de três quarks. Nosso objetivo é estudar aqui os estados li-

* Atualmente: no Max-Planck Institut - PLF - 8046 - Garching /Muenchen, Alemanha Ocidental.

gados de três corpos, numa aproximação não relativística, supondo que forças de três corpos são inexistentes.

Este formalismo pode ser aplicado ao estudo de estados ligados de três quarks. Como exemplo disto, calculamos a massa prevista para um barion formado por três quarks com charme (CCC) extrapolando-se os resultados obtidos do estudo das famílias J/ψ [1].

2. O PROBLEMA DE TRÊS CORPOS EM MECÂNICA QUÂNTICA

Para o tratamento do problema de três corpos em mecânica quântica, introduz-se um sistema externo e um interno de coordenadas ao invés do sistema vetorial em relação do CM, usual.

O sistema interno descreve a forma do triângulo formado pelas partículas e as coordenadas externas a sua orientação no espaço. Os operadores do momento angular orbital dependem dos sistema externo apenas, o qual pode ser separado para um sistema de três corpos isolados, reduzindo a equação de Schrödinger, a um sistema de equações acopladas nas coordenadas internas[2].

Para os estados s, p e d, um sistema de coordenadas internas formulado por Zickendraht[2] será apresentado a seguir, que permite transformar o problema matemático tridimensional em um unidimensional.

Escolhendo para sistema externo os três ângulos de Euler definidos pelos três principais eixos do momento de inércia, o sistema interno (y, α, β) estará relacionado com as distâncias $r_{ik} (i,k = 1,2,3)$ da massa m_i por:

$$r_{12} = \left[\frac{(m_1+m_2)_m}{4m_1m_2} \right]^{1/2} y(1 - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta)^{1/2} \qquad (2a)$$

$$r_{23} = \left[\frac{(m_2+m_3)_m}{4m_2m_3} \right]^{1/2} y(1 - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}(\beta - \delta_1))^{1/2} \qquad (2b)$$

$$r_{31} = \left[\frac{(m_3+m_1)}{4m_3m_1} m \right]^{1/2} y(1 - \text{sen } a \text{ sen}(\beta - \delta_2))^{1/2} \tag{2c}$$

onde

$$m = \frac{m_1m_2 + m_2m_3 + m_3m_1}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$\delta_1 = \text{arcos } \frac{m_1(m_3 - m_2) - m_2(m_3 + m_2)}{(m_1+m_2) \quad (m_2+m_3)} \tag{3a}$$

$$\delta_2 = - \text{ arcos } \frac{m_2(m_3 - m_1) - m_1(m_3 + m_1)}{(m_1+m_2) \quad (m_3+m_1)} \tag{3b}$$

$$0 \leq \delta \leq \pi; \quad \pi \leq \delta_2 \leq 2\pi \tag{4}$$

Para $m_1 = m_2 = m_3$ **temos**

$$r_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} y(1 - \text{sen } a \text{ sen}\beta)^{1/2} \tag{5a}$$

$$r_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}} y(1-\text{sen}\alpha\text{sen}(\beta-2\pi/3))^{1/2} \tag{5b}$$

$$r_{31} = \frac{1}{\sqrt{2}} y(1-\text{sen}\alpha\text{sen}(\beta-4\pi/3))^{1/2} \tag{5c}$$

A equação de Schrödinger no centro de massa das três partículas tem a forma:

$$\left\{\frac{\hbar^2}{m} (\Delta_1 + \Delta_2) + E - V\right\}\psi = 0 \tag{6}$$

Δ_1 e Δ_2 são os operadores ∇^2 para os vetores

x_1 e x_2, dados por:

$$\vec{x}_1 = \left[\frac{2m_1m}{(m_1+m_2)m}\right]^{1/2} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \tag{7a}$$

$$\vec{x}_2 = \left[\frac{2m_3(m_1 + m_2)}{m_1m_2 + m_2m_3 + m_3m_1}\right]^{1/2} \left(\vec{r}_3 - \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}\right) \tag{7b}$$

A transformação para as novas coordenadas $(\phi, \Theta, \psi, y, \alpha, \beta)$ é tediosa, e foi feita em detalhe por Zickendraht[2].

O problema quântico das três partículas pode ser formulado em termos das três distâncias $r_{i,j}(i,j, = 1,2,3)$ entre as partículas, ou equivalentemente das três coordenadas internas y, α, β.

Para um estado ligado fundamental, a equação de Schrödinger pode ser escrita como:

$$\left[\frac{\hbar^2}{m}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{5\alpha}{\partial y} + \frac{4}{y^2}\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\cos 2\alpha}{\operatorname{sen} 2\alpha}\frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{1}{\operatorname{sen} 2\alpha}\frac{\partial^2}{\partial \beta^2}\right) + E - V(y,\alpha,\beta)\right]\psi_s = 0 \tag{8}$$

A função de onda ψ_s pode ser expandida em termos de um conjunto ortonormal completo de funções $g_{\lambda\mu}(\alpha,\beta)$ definidas pela parte angular do operador na equação acima, de maneira análoga em que obtemos os harmônios esféricos com a parte angular do Hamiltoniano de uma partícula.

$$\psi_s = \sum_{\lambda\mu} h_{\lambda\mu}(y)\, g_{\lambda\mu}(\alpha,\beta) \tag{9}$$

Na notação usada aqui, os λ são inteiros positivos e $\mu = \lambda - 2n$ com $\lambda \geqslant n \geqslant 0$. O primeiro termo $h_{00}(y)$ é a solução da equação obtida de (8) substituindo-se o potencial $V(y,\alpha,\beta)$ por uma média $V_0(y)$ no espaço (α,β), utilizando-se do elemento de volume sen a $\cos\alpha\, d\alpha\, d\beta$ [2]:

$$V_0(y) = \langle V(r_{12}, r_{23}, r_{31})\rangle_{\alpha,\beta} = \langle V(y,\alpha,\beta)\rangle_{\alpha,\beta} \tag{10}$$

Dado este potencial médio nosso problema consiste em resolver a seguinte equação:

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{5}{y}\frac{\partial}{\partial y}\frac{m}{\hbar^2}\left[E - V_0(y)\right] - \frac{4\lambda(\lambda+2)}{y^2}\right\} h_\lambda(y) = 0 \tag{11}$$

Para uma **interação** puramente coulombiana isto foi feito na Ref.2. A seguir calcularemos $V_0(y)$ para o potencial de nosso interesse.

3. CALCULO DE $V_0(y)$ PARA $V(r) = r^{2\nu}$

Para $V(r) = r^{2\nu}$ temos que

$$V_0(y) = Br^{2\nu} \tag{12}$$

Neste caso, interessa-nos determinar B que é a média do potencial tridimensional no espaço de α e β, multiplicado por sen α cos α:

$$\langle V(y,\alpha,\beta)\rangle_{\alpha,\beta} = BV_0(y) \tag{13}$$

Designado por:

$$B_1 = \frac{1}{2^\nu 2\pi^2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{4\pi}(1-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta)^\nu \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\, d\alpha d\beta \tag{14}$$

$$B_2 = \frac{1}{2^\nu 2\pi^2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{4\pi}(1-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(\beta-2\pi/3))^\nu \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\, d\alpha d\beta \tag{15}$$

$$B_3 = \frac{1}{2^\nu 2\pi^2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{4\pi}(1-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(\beta-4\pi))^\nu \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\, d\alpha d\beta \tag{16}$$

cada um das três parcelas de B,

$$B = B_1 + B_2 + B_3 \tag{17}$$

Procederemos ao cálculo em separado de cada um deles, contudo como veremos a seguir $B_1 = B_2 = B_3$.

Designando

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{sen}\alpha & y &= \operatorname{sen}\beta \\ z &= \operatorname{sen}(\beta-2\pi/3) & w &= \operatorname{sen}(\beta-4\pi/3) \end{aligned} \tag{18}$$

temos para cálculo de B_1:

$$(1 - \text{sen}\alpha\text{sen}\,\beta)^{\nu} = (1 - xy)^{\nu} \tag{19}$$

e neste caso (14) se escreve com

$$B_1 = \frac{1}{2^{\nu}} <(1 - xy)^{\nu} \quad x\sqrt{1-x^2} >_{\alpha,\beta}$$

Utilizando-se da expansão binomial generalizada tems:

$$(1 - xy)^{\nu} = 1 - \binom{\nu}{1}(xy) + \binom{\nu}{2}(xy)^2 - \binom{\nu}{3}(xy)^3 + \ldots$$

$$x\sqrt{1-x^2} = x\left[1 - \binom{1/2}{1}x^2 + \binom{1/2}{2}x^4 - \binom{1/2}{3}x^6 + \ldots\right]$$

logo

$$<(1- xy)^2\, x\sqrt{1-x^2} >_{\alpha,\beta} = <\left[x - \binom{2}{1} x^2y + \binom{2}{2} x^3y^2 - \binom{2}{3} x^4y^3 + \ldots\right]$$
$$x\left[1 - \binom{1/2}{1} x^2 + \binom{1/2}{2} x^4 - \ldots\right]>_{\alpha,\beta} \tag{20}$$

com X é definido apenas no espaço de α e y apenas no de β de acordo com (18) temos:

$$<x^ny^m>_{\alpha,\beta} = <x^n>_{\alpha} <y^m>_{\beta} .$$

De (18) concluimos que

a) $<y^{(n\,=\,\text{impar})}>_{\beta} = 0$

b) $<y^{(n\,=\,\text{par}\;)}>_{\beta} \neq 0$ (21)

c) $<x^n>_{\alpha} = <y^n>_{\beta}$

Portanto, será necessário calcular apenas

$$<y^{(n\,=\,\text{par})}>_{\beta} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\text{sen}\alpha)^n\, d\alpha$$

Para n=2 temos o conhecido resultado

$$<y^2>_\beta = \frac{1}{2} \tag{22}$$

Para n=par, n>2 vamos usar a fórmula de Wallis:

$$\int (\text{sen } x)^n \, dx = \frac{(\text{sen } x)^{n-1} \cos x}{n} - \frac{n-1}{n} \int (\text{sen } x)^{n-2} \, dx$$

e obteremos

$$\begin{aligned} &<y^4> = \frac{3}{4}\,\frac{1}{2} && <y^8> = \frac{7}{8}\,\frac{5}{6}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{2} \\ &<y^6> = \frac{5}{6}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{2} && <y^{10}> = \frac{9}{10}\,\frac{7}{8}\,\frac{5}{6}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{2} \end{aligned} \tag{23}$$

Logo, substituindo em (20), as relações (21), (22) e (23):

$$<(1-xy)^\nu \, x\sqrt{1-x^2}>_{\alpha,\beta} = \frac{1}{\pi 2^\nu}\left[1 + \binom{\nu}{2}\left(\frac{2}{2+2}\right)\frac{1}{2} + \binom{\nu}{4}\left(\frac{2}{4+2}\right)\left(\frac{3}{4}\,\frac{1}{3}\right) + \right.$$

$$\left. + \binom{\nu}{6}\left(\frac{2}{6+2}\right)\left(\frac{5}{6}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}\right) + \ldots\right]$$

Para o cálculo de B_2 e B_3 basta notar que

$$<z^n>_\beta = <y^n>_\beta$$

e portanto

$$<(1-xy)^\nu \, x\sqrt{1-x^2}>_{\alpha,\beta} = <(1-xz)^\nu \, x\sqrt{1-x^2}>_{\alpha,\beta}$$

Por conseguinte, $<(1-xw)^\nu>_{\alpha,\beta} = <(1-xy)^\nu>_{\alpha,\beta}$ e assim $B_1 = B_2 = B_3$

A fórmula final para B é:

$$B = \frac{3}{\pi 2^\nu}\left[1 + \binom{\nu}{2}\left(\frac{2}{2+2}\right)\frac{1}{2} + \binom{\nu}{4}\left(\frac{2}{4+2}\right)\left(\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}\right) + \binom{\nu}{6}\left(\frac{2}{6+2}\right)\left(\frac{5}{6}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}\right) + \ldots\right]$$

Esta série é convergente para qualquer ν pois é dominada termo a termo pela expansão de $(1+x)^{\nu}\big|_{x=1}$ que converge para 2^{ν}.

4. CALCULO DE B PARA $V(r) = r^{2\nu}$

a) $V(r) = \frac{1}{r}$

$$V(r_{12}, r_{23}, r_{31}) = \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{23}} + \frac{1}{r_{31}}$$

$$V_0(y) = B(\frac{1}{y})$$

$$B = 5{,}0903$$

Este resultado compara favoravelmente como o de[3] que é 5,0930 através de um cálculo analítico exato.

b) $V(r) = r^2$

$$V_0(y) = By^2$$

$B = 1{,}5$ (resultado exato pois (24) é finita para ν inteiro).

c) $V(r) = r$

$$V_0(y) = By$$

$$B = 2{,}0372$$

d) $V(r) = \sqrt{r}$

$$V_0(y) = B\sqrt{y}$$

$$B = 2{,}4408$$

5. A EQUAÇÃO DE TRÊS CORPOS E SUA SOLUÇAO

Utilizando (11) e os resultados de 4 temos a equação a ser resolvida para $h_\lambda(y)$ no caso $n = 1/2$ em (1):

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{5}{y}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{m}{\hbar 2}\left[E - V_0(y)\right] - \frac{4\lambda(\lambda+2)}{y^2} \right\} - h_\lambda(y) = 0 \qquad (24)$$

com

$$V_0(y) = 2,4408\, K_1 \sqrt{y} + 5,0930\, \frac{K_2}{y} + C \quad .$$

Podemos resolver esta equação pelo método WKB ou por diferenças finitas. Como $h_\lambda(0) = h_\lambda(\infty) = 0$ no caso de diferenças finitas substituimos infinito por um número b suficientemente afastado da origem tal que $h_\lambda(b) \cong 0$.

Para diferenças finitas obtemos a seguinte equação matriciai de autovalor:

$$\left[\frac{1}{k^2} - \frac{5}{2k^2 n}\right] f_{n-1} - \left[\frac{2}{k^2} + \frac{m}{\hbar^2}\left(2,4418\, K_1 \sqrt{nk} + \frac{5,0930\, K_2}{nk} + C\right)\right.$$

$$\left. + \frac{4\lambda(\lambda+2)}{(nk)^2}\right] f_n + \left[\frac{1}{k^2} + \frac{5}{2k^2 n}\right] f_{n+1} = -\left(\frac{mE}{\hbar^2}\right) f_n \qquad (25)$$

onde para um número total $N+2$ de pontos, com matriz $N \times N$, temos $k = b/(N+1)$, $f_n = h_\lambda(nk)$ e $n = 1,2,\ldots,N$.

Devido à condição de contorno, $f_0 = 0$ e $f_{N+1} = 0$.

Esta equação matricial tridiagonal pode ser resolvida por métodos algébricos usuais, fornecendo valores aproximados dos autovalores e das autofunções correspondentes.

Neste caso pode ser usado com vantagem o método discutido em[4], para o cálculo dos autovalores de menor módulo, que correspondem aos primeiros estados ligados.

6. APLICAÇÃO AO SISTEMA LIGADO DE TRÊS QUARKS (ccc)

A família de mesons J/ψ pode ser analisada como sendo estados ligados de um quark (c) e de um antiquark ($\bar{c}$). Em[1] foi determinado um potencial fenowmnológico $V(r)$ que reproduz bem o espectro destes mesons.

Considerando um barion (ccc) como uma mistura não relativística e usando o resultado[5]

$$V_{q\bar{q}(\text{meson})}(r) = 2\,V_{qq\,(\text{barion})}(r)$$

para o potencial

$$V_{q\bar{q}}(r) = Kr^n + C$$

com K, C e m_c de acordo com a Ref. 1, obtemos os valores de $m_{(\text{ccc})}$ em função do expoente n como mostrado na Figura 1.

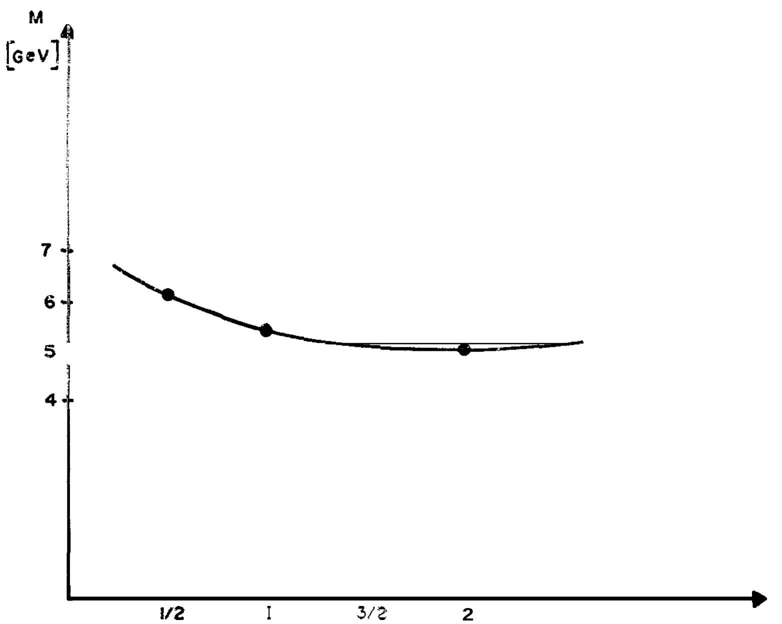

Fig. 1 - Gráfico da massa do barion ccc para um potencial $V_{qq} = 2V_{q\bar{q}} = kr^n + C$ em função de n.05. Valores das constantes foram obtidos da Ref.1.

Os resultados da Ref.1 levariam a dar preferência ao valor $m_{(ccc)} = 6.167$ GeV que corresponde ao valor $n = 1/2$.

Uma análise detalhada deveria incluir o estudo do espectro completo dos barions $(q_1 q_2 q_3)$.

Esse estudo está em andamento e deverá fazer parte de uma publicação posterior. Gostariamos de frisar que para este estudo ainda é necessário obter os dados experimentais sobre a dependência de

$$R = \frac{\sigma(e^+ e^- \to \text{hadron})}{\sigma(e^+ a^- \to \mu^+ \mu^-)}$$

em colisão de e^+ e e^- em energias no centro de massa superiores a 10 GeV, que nos permitirão estudar melhor a dependência de $V_{q\bar{q}}$ do tipo do quark (flavour).

REFERÊNCIAS

1. H.F.Carvalho, R.Chanda and A.B. d'Oliveira, Lettere al Nuovo Cimento, 22, 679 (1978).
2. Zickendralit, W., Annals of Phys., 35, 18-41 (1965).
3. Zickendraht, W., Proc. Natl. Acad. Sci. V.S. 52, 1565 (1964).
4. Edgardo Gerck e A.B. d'Oliveira - "Continued Fraction Calculation of eigenvalues of tridiagonal matrices arising from the Schrödinger equation" - Relatório EAV-18/78. Submetido a publicação em Journal of Computational and Applied Mathernatical Methods.
5. N. Isgur, "Soft QCD: Low energy hadron physics with chromodynamics" Lectures presented at the XVI International School of Subnuclear Physics, Erice, August, 1978. OXFORO PREPRINT 67/78.