

## Comentários sobre o Campo Magnético Associado a uma Distribuição Não-Estacionária de Correntes

R. C. T. DA COSTA e G. F. LEAL FERREIRA

*Instituto de Física e Química de São Carlos, Universidade de São Paulo, C.P. 369, 13560 São Carlos, SP*

Recebido em 5 de outubro de 1979

In this paper we consider the magnetic field produced by displacement currents. The reason why this field vanishes in the quasi-static case is studied in detail using a simple RC circuit as an illustration. We calculate the magnetic field  $\vec{B}_e$ , due only to the conduction currents, and discuss how can  $\text{rot } \vec{B}_e$  take care of both conduction and displacement current densities. It is shown that, in order to obtain the correct results, the often-neglected role played by the currents in the capacitor plates must be carefully taken into account.

Consideramos neste trabalho o campo magnético produzido pelas correntes de deslocamento. A razão pela qual este campo se anula no caso quase estático é discutida em detalhe, usando-se como ilustração um circuito simples do tipo RC. Calculamos o campo magnético  $\vec{B}_e$ , devido apenas às correntes de condução e discutimos como pode o  $\text{rot } \vec{B}_e$  dar conta tanto das densidades da corrente de condução quanto da de deslocamento. Mostra-se que, para obter o resultado correto, é preciso levar cuidadosamente em conta o papel (frequentemente ignorado) das correntes que fluem nas placas do capacitor.

### 1. INTRODUÇÃO

No seu conhecido texto de física básica<sup>1</sup>, Purcell apresenta, como motivo para o fato de Faraday não ter descoberto as correntes de deslocamento, a impossibilidade de detectar o efeito das mesmas utilizando apenas os aparelhos disponíveis na época. De fato, as constantes

de tempo dos circuitos de então eram tão altas (relativamente falando) que o *efeito total* das correntes de deslocamento sobre o campo magnético (discutido em detalhe mais adiante) podia ser desprezado. É importante notar, desde já, que isto não quer dizer que as correntes de deslocamento sejam necessariamente pequenas, mas sim que elas estão distribuídas *espacialmente* de tal maneira que suas contribuições, para o campo magnético, se compensam em todos os pontos do espaço. Até onde vai o nosso conhecimento, apenas o texto de Purcell chama a atenção para este fato, enquanto que nos demais a corrente de deslocamento é introduzida de uma maneira que, embora tecnicamente correta, é aparentemente incapaz de explicar o comportamento mencionado por Purcell, levando inclusive a resultados que podem parecer contraditórios quando analisados sem a devida cautela.

Para melhor esclarecer este ponto vamos considerar o dispositivo da Fig. 1, o qual é empregado com frequência para ilustrar a participação das correntes de deslocamento no circuito de carga de um capacitor: "Temos duas placas circulares paralelas  $P_1$  e  $P_2$ , de área  $A$ , que são alimentadas por uma corrente  $I$  transportada por dois fios retílineos, semi-infinitos, que passam pelos seus centros, perpendiculares aos planos das mesmas. Seja uma superfície fechada, contendo a placa  $P_1$ , em forma de uma garrafa com um "pescoço" alongado de seção circular que circunda o fio até o ponto  $P$ , muito longe de  $P_1$ . Como  $\text{div}(\text{rot } \vec{B}) = 0$ , o fluxo do  $\text{rot } \vec{B}$  que entra pela "tampa"  $S$  da nossa garrafa (igual neste caso, a  $\mu_0 I$  por não haver correntes de deslocamento perto de  $P$ ) é o mesmo que sai através do seu corpo  $S'$ . Ora, como  $S'$  não é atravessado por nenhuma corrente de condução, este mesmo fluxo é agora totalmente devido à densidade  $\vec{j}_d$  das correntes de deslocamento. Podemos verificar, com facilidade, a correção deste resultado no caso de um capacitor "perfeito" (placas grandes e muito próximas) carregado por uma corrente que varia muito lentamente. De fato, nesta aproximação o campo elétrico está praticamente contido no espaço entre as placas e pode ser considerado com o seu resultado estático  $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ ; onde  $\sigma = Q/A$  e  $dQ/dt = I$ . Usando então  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_d = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$  obtemos para o fluxo através da "base" de  $S'$ .

$$|\text{rot } \vec{B}|_A = \mu_0 \epsilon_0 A \left| \frac{\partial E}{\partial t} \right| = \mu_0 \epsilon_0 A \frac{I}{\epsilon_0 A} = \mu_0 I, \quad (1)$$

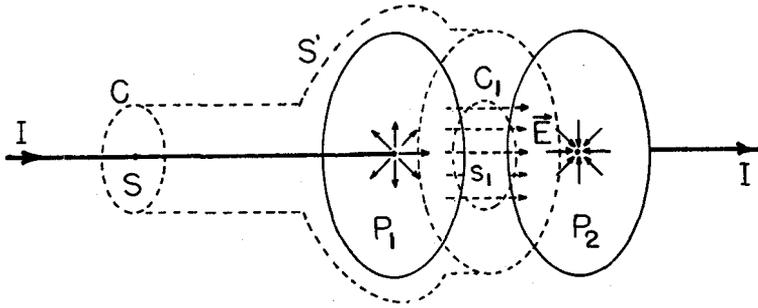


Fig.1

o que concorda com o resultado obtido para a "tampa" S. Assim sendo, a corrente de deslocamento aparece, neste tipo de circuito, como um ingrediente indispensável para restabelecer o mesmo valor  $\mu_0 I$  para o fluxo do rot  $\vec{B}$  através de qualquer seção do fio, e que, portanto, não pode ser impunemente desprezada.

Podemos aproveitar ainda a Fig.1 para calcular o valor de  $\vec{B}$  perto do fio e entre as placas. Supondo, por simetria, que em cada ponto o vetor  $\vec{B}$  é perpendicular ao plano que contém o fio e passa por este ponto, obtemos para a circunferência  $C_1$  de raio que limita a área circular  $S_1$ :

$$\oint_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 2\pi\rho B = \iint_{S_1} \text{rot } \vec{B} \cdot \hat{n} dS = \mu_0 I \frac{\rho^2}{a^2}, \quad (2)$$

o que, sendo  $a$  o raio das placas, dá para  $B$  o valor  $\frac{\mu_0 I}{2\pi} \rho / a^2$ . O mesmo tipo de cálculo aplicado à circunferência  $C$  com centro no ponto  $P$  dará, naturalmente, para o valor de  $B$  longe das placas o bem conhecido resultado  $\mu_0 I / 2\pi\rho$ . Destes cálculos fica a falsa mas quase inevitável impressão de que as correntes de condução são responsáveis pelos valores de  $\vec{B}$  longe do capacitor, enquanto as correntes de deslocamento desempenham o mesmo papel para o valor de  $\vec{B}$  entre as placas, o que está em franco desacordo com a afirmação, feita anteriormente, de que, na aproximação considerada, as correntes de condução, sozinhas, geram os valores  $B$  em todos os pontos do espaço. Esta questão será discutida em detalhe na seção seguinte, onde seguiremos uma linha de raciocínio que, esperamos, esclarecerá o leitor a respeito da natureza dos fenômenos que estão re-

almente acontecendo. Finalmente, na última parte deste trabalho, calcularemos o campo magnético usando somente as correntes de condução. Embora o nível deste cálculo não seja exatamente adequado a um curso tradicional sobre o assunto, ele tem a considerável vantagem de permitir uma análise separada, e muito instrutiva, das contribuições devidas às várias partes do circuito; isto é, a dos fios interrompidos e a da corrente que flui através das placas, sendo que esta última desempenha, como veremos, um papel essencial neste tipo de problema.

## 2. O CAMPO MAGNÉTICO DAS CORRENTES DE DESLOCAMENTO

Sabemos que

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 (\vec{j}_c + \vec{j}_d), \quad \text{div } \vec{B} = 0, \quad (3)$$

onde  $\vec{j}$  é a densidade de corrente de condução e  $\vec{j}_d = \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$  a de deslocamento. A solução do sistema (3) é dada pela bem conhecida fórmula de Biot-Savart:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{(\vec{j}_c(\vec{r}', t) + \vec{j}_d(\vec{r}', t)) \wedge (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \quad (4)$$

Como  $\text{div}(\text{rot } \vec{B}) = 0$  é claro que a expressão (4) só tem sentido se  $\text{div}(\vec{j}_c + \vec{j}_d) = 0$ , o que é garantido pela equação da continuidade:

$$\text{div } \vec{j}_d = \text{div}(\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \vec{E}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div } \vec{j}_c. \quad (5)$$

(Esta é, aliás, uma maneira equivalente de introduzir a corrente de deslocamento; adicionando à corrente de condução um termo que mantenha a consistência da equação  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$  para processos dependentes do tempo).

Vamos agora separar o campo magnético da expressão (4) na forma

$$\vec{B} = \vec{B}_c + \vec{B}_d,$$

onde  $\vec{B}_c$  e  $\vec{B}_d$  correspondem, respectivamente, às contribuições das correntes de conduções e deslocamento. O termo  $\vec{B}_d$  pode ser desenvolvido na forma

$$\begin{aligned} \vec{B}_d(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}_d(\vec{r}', t) \wedge (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \text{rot} \iiint \frac{\vec{j}_d(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \\ &= \frac{\mu_0 \epsilon_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \iiint \frac{\vec{E}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'. \end{aligned} \quad (6)$$

Mas, na nossa aproximação estática, temos  $\vec{E}(\vec{r}', t) = -\text{grad}' \phi(\vec{r}', t)$  onde  $\phi(\vec{r}, t)$  é o potencial gerado pela distribuição de cargas no tempo  $t$ .

(De agora em diante os símbolos  $\text{grad}'$ ,  $\text{div}'$  e  $\text{rot}'$  indicam que estes operadores vetoriais atuam sobre as variáveis de integração;-). Substituindo este valor de  $\vec{E}$  em (6), integrando por partes, e abandonando o termo de superfície obtemos o resultado mencionado na introdução deste trabalho:

$$\begin{aligned} \vec{B}_d &= -\frac{\mu_0 \epsilon_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \iiint \phi(\vec{r}', t) \text{grad}' \left\{ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right\} dV' = \\ &= \frac{\mu_0 \epsilon_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \left[ \text{grad} \iiint \frac{\phi(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \right] \end{aligned} \quad (7)$$

(Note que, na nomenclatura adotada,  $\text{grad}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\text{grad} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ ). Vamos assim que o resultado  $\vec{B}_d = 0$  não quer dizer que  $\vec{j}_d$  seja nulo ou mesmo pequeno em relação a  $\vec{j}_c$  mas está relacionado ao tipo de distribuição espacial das correntes de deslocamento que prevalece na aproximação quase-estática. É importante observar também que a separação  $\vec{B} = \vec{B}_c + \vec{B}_d$  não significa de modo nenhum que  $\vec{B}$  tenha como fonte apenas a densidade de corrente  $\vec{j}_c$  e  $\vec{B}_d$  apenas a densidade de corrente  $\vec{j}_d$  (isto é  $\text{rot} \vec{B}_c \neq \mu_0 \vec{j}_c$  e  $\text{rot} \vec{B}_d \neq \mu_0 \vec{j}_d$ ). De fato, como  $\text{rot}(\vec{B}_c + \vec{B}_d)$  é sempre igual a  $\mu_0(\vec{j}_c + \vec{j}_d)$ , se tivermos  $\vec{B}_d = 0$  então  $\text{rot} \vec{B}_c$ , sozinho, continuará dando a soma das densidades dos dois tipos de corrente em qualquer ponto do espaço, seja dentro ou fora do capacitor. Assim sendo, quando calculamos o fluxo de  $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_d$  através da superfície

$S_1$  da Fig. 1 (que não era atravessada pela corrente de condução) poderíamos ter usado  $\vec{B}_c$  no lugar de  $\vec{R}$ , obtendo ainda o mesmo resultado. Podemos corroborar este fato verificando diretamente a validade, no nosso caso da equação  $\text{rot } \vec{B}_c = \mu_0 (\vec{j}_c + \vec{j}_d)$ : - Realmente, usando na expressão de  $\vec{B}_c$  obtida de (4)

$$\vec{B}_c(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}_c(\vec{x}', t) \wedge (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} dV',$$

os conhecidos resultados

$$\text{rot}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = (\text{div } \vec{B})\vec{A} - (\text{div } \vec{A})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \text{grad})\vec{A} - (\vec{A} \cdot \text{grad})\vec{B} \quad \text{e}$$

$$\Delta \left\{ \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right\} = -4\pi \delta(\vec{x} - \vec{x}'), \text{ obtemos}$$

$$\text{rot} \vec{B}_c(\vec{x}, t) = \mu_0 \vec{j}_c(\vec{x}, t) + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \left\{ \vec{j}_c(\vec{x}', t) \cdot \text{grad}' \right\} \text{grad}' \left( \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) dV'. \quad (8)$$

Efetuando por partes a integral no segundo membro de (8) chegamos a

$$\text{rot} \vec{B}_c(\vec{x}, t) = \mu_0 \vec{j}_c(\vec{x}, t) + \text{grad} \left\{ \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\text{div}' \vec{j}_c(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' \right\} \quad (9)$$

Substituindo  $\text{div}' \vec{j}_c(\vec{x}', t)$  por  $-\frac{d}{dt} \rho(\vec{x}', t)$  obtemos finalmente

$$\text{rot} \vec{B}_c(\vec{x}, t) = \mu_0 \left\{ \vec{j}_c(\vec{x}, t) + \epsilon_n \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\vec{x}, t) \right\}, \quad (10)$$

onde

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = -\text{grad } \phi(\vec{x}, t), \quad \phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' \quad (11)$$

Vemos então de (10) e (11) que  $\text{rot } \vec{B}$  também contém a contribuição de corrente de deslocamento (na aproximação quase-estática), o que vem confirmar a correção do resultado (7).

Qual a validade desta aproximação? No caso em que as correntes, ou mais exatamente, a densidade de corrente não depende do tempo ela é exata. De fato, se  $\vec{j}$  não depende do tempo, pela equação da continuidade, tem-se  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = \text{div } \vec{j}_c(\vec{r})$  e, portanto  $\rho(\vec{r}, t)$  é linear em  $t$ . No cálculo do potencial retardado, a densidade será

$$\rho(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}) = \rho(\vec{r}', t) + \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \text{div } \vec{j}_c(\vec{r}'),$$

pela linearidade, e quando integrada em  $dV'$ , com denominador  $|\vec{r} - \vec{r}'|$ , o primeiro termo dá o potencial instantâneo, enquanto o segundo, um termo constante. Por sua vez, o potencial vetor  $\vec{A}$  será independente de  $t$ . Conclui-se então que o campo elétrico  $\vec{E}$ ,  $\vec{E} = -\frac{\partial \phi}{\partial t} - \text{grad } \phi$ , conterà somente a contribuição da distribuição instantânea, como afirmáramos. Já para circuitos oscilantes, em que  $\vec{j}_c$  e  $\rho$  são funções de  $\omega t$ , o efeito do retardo, como é bem sabido, só pode ser desprezado na "zona próxima":  $|\vec{r} - \vec{r}'| \ll \lambda$ ,  $\lambda = 2\pi c/\omega$ .

Para resumir observamos que na magnetostática as equações são  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_c(\vec{r})$ ,  $\text{div } \vec{B} = 0$  e  $\text{div } \vec{j}_c(\vec{r}) = 0$ ; cuja solução é fornecida pela lei de Biot-Savart:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}_c(\vec{r}') \wedge (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$$

Se há acumulação de carga no circuito, como no caso das placas de um capacitor, as equações originais mudam, pois  $\text{rot } \vec{B}$  agora vale  $\mu_0(\vec{j}_c + \vec{j}_d)$ , mas, a lei de Biot-Savart derivada apenas da corrente de condução continua (nas condições discutidas acima) dando o resultado correto; pois, curiosamente, o rotacional do valor de  $\vec{B}$  obtido inclui automaticamente as correntes de deslocamento. Assim sendo uma extensão desatenta da magnetostática à "magneto-dinâmica" mantendo como fonte do campo apenas as correntes de condução estaria errada na formulação diferencial ( $\text{rot } \vec{B} = \mu_0(\vec{j}_c + \vec{j}_d)$ ) mas pode dar bons resultados ao utilizar cegamente a lei de Biot-Savart.

### 3. O CAMPO MAGNÉTICO DAS CORRENTES DE CONDUÇÃO

No cálculo do campo magnético temos dois tipos de contribuição a considerar na Fig.1: a dos fios interrompidos e a das correntes que fluem radialmente sobre a superfície das placas  $P_1$  e  $P_2$ . A Fig. 2 ilustra o cálculo do valor do campo magnético  $\vec{B}_f$  produzido pelo fio da esquerda num ponto  $P$  do plano  $(x,z)$  (tomando o eixo dos  $z$  na direção do fio). Temos:

$$\vec{B}_f = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-\infty}^0 \frac{\hat{z} \wedge (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dz' \quad (12)$$

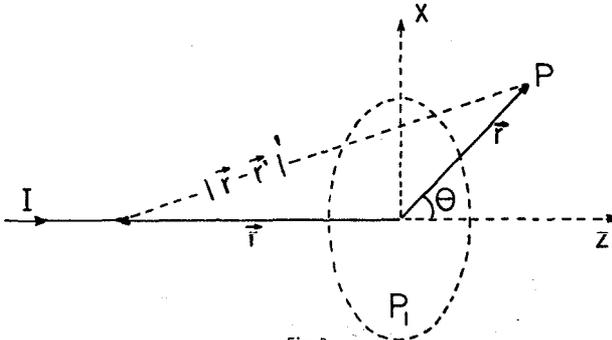
onde  $\hat{z} \wedge (\vec{r} - \vec{r}') = r \sin\theta \hat{y}$  e  $|\vec{r} - \vec{r}'| = (r^2 + z'^2 - 2rz' \cos\theta)^{1/2}$ . Chamando  $\rho = r \sin\theta$  e efetuando os cálculos vem<sup>2</sup>:

$$\vec{B}_f = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \hat{y} \int_{-\infty}^0 \frac{r \sin\theta dz'}{(r^2 + z'^2 - 2rz' \cos\theta)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho} (1 - \cos\theta) \hat{y}, \quad (13)$$

o que dá, naturalmente, o campo de um fio infinito no limite em que  $\theta \rightarrow \pi$ . A expressão (13) pode também ser usada para ilustrar o que foi dito a respeito das correntes de deslocamento, bastando para isto obter, com o auxílio de (9), o valor de  $\text{rot } \vec{B}_f$ :

$$\vec{B}_f = \mu_0 \left[ \vec{j}_c + \frac{I}{4\pi r^2} \hat{r} \right] \quad (14)$$

onde  $\hat{r}$  é o vetor unitário na direção radial. De fato, é fácil reco-



nhecer no segundo membro de (14) a contribuição do campo elétrico da carga positiva que se acumula continuamente na origem. Convém notar, aliás, que poderíamos ter usado, no lugar da Fig.1, o circuito simplificado da Fig. 3, onde temos duas pequenas esferas  $E_1$  e  $E_2$  no lugar das placas do capacitor, dando para as correntes de deslocamento as mesmas linhas de campo de um dipolo elétrico. O mesmo cálculo ilustrado na Fig. 1 pode ser então repetido para o circuito circular  $C_1$ , localizado entre as "placas", mas usando agora somente o campo magnético produzido pelos fios dado em (13) e (14). Sendo  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  os ângulos sólidos abrangidos pela circunferência  $C_1$  quando vista, respectivamente, dos centros de  $E_1$  e  $E_2$  obtemos

$$2\pi\rho B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left\{ \iint_{S_1} \frac{\hat{z} \cdot \hat{r}_1}{r_1^2} dS_1 + \iint_{S_1} \frac{\hat{z} \cdot \hat{r}_2}{r_2^2} dS_1 \right\} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \{ \Omega_1 + \Omega_2 \} =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2} \{ 1 - \cos \theta_1 + 1 - \cos \theta_2 \}, \quad (15)$$

o que dá exatamente a soma dos campos magnéticos (13) produzidos pelos dois fios. Deve-se notar também que, a princípio, o campo magnético cresce linearmente quando nos afastamos da reta que une os centros de  $E_1$  e  $E_2$ , o que coincide com a dependência espacial observada no caso da Fig. 1. Naturalmente que aqui o coeficiente angular do crescimento vai depender do ponto, tendendo para o infinito, quando nos aproximamos de  $E_1$  e  $E_2$  características estas que devem ser alteradas quando introduzirmos a contribuição das correntes nas placas circulares  $P_1$  e  $P_2$ .

Calculemos agora o campo magnético  $\vec{B}_2$ , devido à placa circular  $P_1$ , no ponto  $P$  de vetor posição  $\vec{r} = r(\cos\theta\hat{z} + \text{sen}\theta\hat{x})$  (Fig. 4). Sendo  $\vec{r}' = \rho(\cos\phi\hat{x} + \text{sen}\phi\hat{y})$ ,

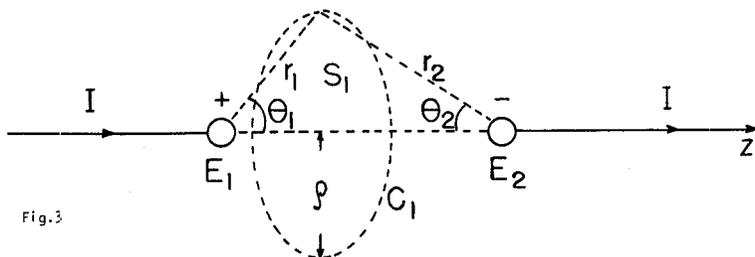


Fig.3

$$|\vec{r}-\vec{r}'| = (r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos\theta \cos\phi)^{1/2},$$

e  $\vec{j}_s(\rho) = j_s(\rho)\hat{\rho}$  (densidade superficial de corrente), obtemos

$$\begin{aligned} \vec{B}_p &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{P_1} \frac{\vec{j}_s(\rho) \wedge (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} dS' \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} r \cos\theta \hat{y} \int_0^a \int_{-\pi}^{\pi} \frac{j_s(\rho) \cos\phi \rho d\rho d\phi}{(r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos\theta \cos\phi)^{3/2}} \end{aligned} \quad (16)$$

onde já abandonamos as componentes de  $\vec{B}_p$  nas direções  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  (eliminadas pela integração na variável  $\phi$ , devido à simetria de  $\vec{j}_s$ ). Para o cálculo de (16) precisamos agora do valor de  $j_s(\rho)$ . Para obtê-lo vamos usar a equação da continuidade,  $\text{div} \vec{j}_s + \frac{da}{dt} = 0$ , sujeita à condição  $j_s(a) = 0$  que delimita o fim da placa. Lembrando que

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{Q}{\pi a^2} = \frac{I}{\pi a^2}$$

e escrevendo a divergência de  $\vec{j}_s(\rho)$  em coordenadas cilíndricas obtemos a equação diferencial

$$\frac{d}{d\rho} j_s(\rho) + \frac{1}{\rho} j_s(\rho) = -\frac{I}{\pi a^2}, \quad (j_s(a) = 0), \quad (17)$$

cuja solução, facilmente obtida, é

$$\vec{j}_s(\rho) = \frac{I}{2\pi} \left\{ \frac{1}{\rho} - \frac{\rho}{a^2} \right\} \hat{\rho} \quad (18)$$

Substituindo (18) no integrando de (16) ficamos com:

$$\vec{B}_p = -\frac{\mu_0 I}{2(2\pi)^2} \hat{y} r \cos\theta \int_{-\pi}^{\pi} \cos\phi d\phi \int_0^a \frac{1 - \rho^2/a^2}{(r^2 + \rho^2 - 2\rho r \cos\theta \cos\phi)^{3/2}} d\rho \quad (19)$$

Para a finalidade que temos em mente é conveniente começar a integração pela variável  $\rho$ . O resultado é:

$$\begin{aligned}
& \int_0^a \frac{1 - \rho^2/a^2}{(r^2 + \rho^2 - 2r\rho \text{sen}\theta \cos\phi)^{3/2}} d\rho = \\
& = \frac{1}{r^2(1 - \text{sen}^2\theta \cos^2\phi)} \left[ \frac{\alpha - r \text{sen}\theta \cos\phi}{(\alpha^2 + r^2 - 2ar \text{sen}\theta \cos\phi)^{1/2}} + \text{sen}\theta \cos\phi \right] + \\
& + \frac{1}{\alpha^2(1 - \text{sen}^2\theta \cos^2\phi)} \left[ \frac{(1 - 2\text{sen}^2\theta \cos^2\phi)\alpha + r \text{sen}\theta \cos\phi}{(\alpha^2 + r^2 - 2ar \text{sen}\theta \cos\phi)^{1/2}} - \text{sen}\theta \cos\phi \right] - \\
& - \frac{1}{\alpha^2} \ln \left[ \frac{(\alpha^2 + r^2 - 2ar \text{sen}\theta \cos\phi)^{1/2} + \alpha - r \text{sen}\theta \cos\phi}{r(1 - \text{sen}\theta \cos\phi)} \right]
\end{aligned}
\tag{20}$$

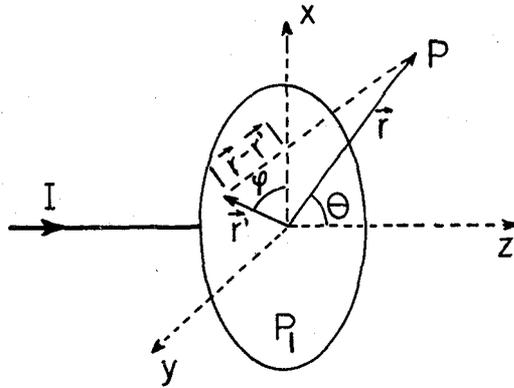


Fig.4

Como queremos o valor de  $\vec{B}_p$  no limite em que  $r \ll a$  (no caso de placas grandes) podemos aproximar as raízes que aparecem no segundo membro de (2), previamente divididas por  $a$ , com o auxílio da expansão

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{1}{2} \alpha(\alpha-1)x^2 + \dots, \quad |x| < 1.$$

Não é difícil mostrar então que o primeiro termo do segundo membro de (2) pode ser expandido na forma

$$\frac{1}{r^2} \{F(\phi) + (r/a)^2 G(\phi)\}$$

onde  $F$  e  $G$  são duas funções do ângulo  $\phi$ ; de modo que os dois termos seguintes, que já possuem o fator  $1/a^2$  em evidência, podem ser tomados, nesta ordem de aproximação, no limite em que  $r \rightarrow 0$ . Após uma série de cálculos extensos mas elementares, obtemos

$$\vec{B}_P = -\frac{\mu_0 I}{(2\pi)^2} r \cos\theta \hat{y} \int_0^\pi \left\{ \frac{\cos\phi}{1 - \text{sen}\theta \cos\phi} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2} \right) - \frac{\text{sen}\theta}{a^2} \frac{\text{sen}^2\phi}{1 - \text{sen}\theta \cos\phi} \right\} d\phi + \dots \quad (21)$$

onde o logaritmo que aparece no segundo membro de (20) foi eliminado por meio de uma integração por partes. A expressão (21) pode ser calculada pelos métodos normais de integração. O resultado final é

$$\vec{B}_P = B_P \hat{y} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} r \cos\theta \left[ \frac{1 - |\cos\theta|}{\text{sen}\theta |\cos\theta|} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2} \right) - \frac{\text{sen}\theta}{a^2} \frac{1}{1 + |\cos\theta|} \right] \quad (22)$$

Temos portanto duas expressões para  $B_P$ : uma do lado direito da placa  $P_1$  ( $\cos\theta > 0$ ) e a outra do lado esquerdo ( $\cos\theta < 0$ ). A solução da direita pode ser escrita como

$$B_P = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1 - \cos\theta}{\rho} + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \rho/a^2 + \dots \quad (23)$$

que, quando somada com o campo  $\vec{B}_S$  de (13), vem dar exatamente a metade do campo entre as placas obtido em (2). Vemos então que o efeito de cada placa consiste, na região entre elas (próximo do prolongamento dos fios), em eliminar completamente a contribuição do fio semi-infinito a ele ligado e criar a *metade* do campo magnético aí existente (o restante corre por conta da outra placa). Já para o lado esquerdo de  $P_1$  o resultado é

$$B_P = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1 + \cos\theta}{\rho} - \frac{\mu_0 I}{4\pi} \rho/a^2 + \dots \quad (24)$$

O segundo termo de (24) é cancelado pela placa  $P_2$  (que tem corrente oposta) ficando, após a soma com  $\vec{B}_F$  somente o campo do fio *como se ele fosse infinito*, o que corrobora inteiramente os cálculos feitos na Introdução. Deve-se observar ainda que todos estes resultados se referem *exclusivamente* à geometria descrita na Fig. 1. Se tivermos

fios oblíquos em relação às placas, ou mesmo perpendiculares, mas que não sejam pronombramentos um do outro, então, mesmo que as placas sejam grande e muito próximas, o campo magnético será substancialmente diferente do que foi aqui obtido.

Para finalizar este trabalho, vale a pena notar, no entanto, que as *idéias gerais* deste problema não precisam ficar restritas ao tipo de situação indicado na Fig.1. Se tivermos, por exemplo, dois fios, transportando uma corrente constante  $I$ , imersos num meio condutor infinito a densidade da corrente vai novamente separar-se em dois termos; a dos fios e a do meio:  $\vec{j} = \vec{j}_f + \vec{j}_m$ . Mas como, por hipótese,  $\vec{j}_m = \sigma \vec{E}$  o campo magnético  $\vec{B}_m$  por um raciocínio idêntico ao que aqui foi desenvolvido será nulo; e teremos, para cada fio, uma expressão do tipo

$$\text{rot } \vec{B}_f = \mu_0 \vec{j}_f + \frac{I}{4\pi r^2} \hat{r}$$

(o segundo termo independe da orientação dos fios). Se por acaso os dois fios forem subitamente removidos, o excesso de carga acumulado nos eletrodos  $E_1$  e  $E_2$  (Fig.3) que fornecia a diferença de potencial que sustentava a corrente, vai ser neutralizada por uma descarga elétrica através do meio. Se a condutividade desta for baixa, de modo a produzir uma descarga lenta sob a ação de um campo quase-estático, tanto a corrente de condução quanto a de deslocamento não produzirão campos magnéticos, o que, por  $\text{rot } \vec{B} = 0$  implica em  $\vec{j} = -\vec{j}_d$ . Como  $\vec{j}_c = \sigma \vec{E}$  e  $\vec{j}_d = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ , isto nos levará, naturalmente, ao bem conhecido resultado

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\sigma/\epsilon_0 t}$$

## REFERÊNCIAS

1. E.M. Purcell: *Coleção Berkeley*, Vol. II, Seções 7-11 e 7-12, Editora Blucher, M.E.C.
2. O. Heaviside: *Electrical Papers*, Vol. I - Chelsea Pub.Co. N.Y. pg. 224.