Revista Brasileira de Física, Vol. 9, Nº 3, 1979

Quantização Parcial de Sistemas Lagrangeanos-Hamiltonianos

CARLOS MARCIO DO AMARAL* e PAULO CARRILHO SOARES FILHO**

Departamento de Física Nuclear do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro

Recebido em 5 de Abril de 1979

A classical variational principle in the Weiss form is constructed for dynamical systems with support spaces of the configuration -phase kind. This extended principle rules the dynamics of classical systems, partially Hamiltonian, in interaction with Lagrangean parametrized subsidiary dynamics. The variational family of equations thus obtained consists of an equation of the Hamilton-Jacobi type, coupled to a family of differential equations of the Euler-Lagrange form. The basic dynamical functions appearing in the equations is a function of the Routh kind. By means of an *ansatz* induced by the variationally obtained family, we propose a generalized set of equations constituted by a wave equation of the Schrödinger type, coupled to a family of equations formaly analog to those Euler -Lagrange equations. A basic operator of Routh type appears in our generalized set of equations. This operator describes the interaction between a quantized Hamiltonian dynamics with a parameterized classical Lagrangean dynamics in semi-classical closed models.

Constroi-se um princípio variacional, na forma de Weiss, para sistemas dinâmicos definidos em espaços suporte de configuração - fase. Este princípio estendido rege a dinâmica de sistemas clássicos, parcialmente Hamiltonianos, em interação com dinâmicas subsidiárias, paramétricas, Lagrangeanas. A família variacional de equações obtida, é

* Pesquisador do CNPq.

** Bolsista do CNPq.

constituída por uma equação diferencial parcial do tipo Hamilton-Jacobi, acoplada a uma família de equações diferenciais ordinárias, do tipo Euler-Lagrange. A função dinâmica básica, presente ao sistema, é uma função do tipo Routh. Por meio de um *ansatz*, sugerido de forma natural pelo sistema variacional clássico obtido, propõe-se um sistema quântico generalizado, constituído por uma equação quântica do tipo Schrödinger, acoplada a uma família de equações, formalmente análogas a equações do tipo Euler-Lagrange. O operador básico presente a esse sistema generalizado é um operador do tipo Routh que descreve, para modelos semi-clássicos fechados, a interação de uma dinâmica Hamiltoniana quantizada com uma dinâmica paramétrica, Lagrangeana, clássica.

1. INTRODUÇÃO

Como é bem sabido[1], uma condição de contorno fundamental à estrutura das teorias quânticas, é a de que o modelo clássico da dinâmica esteja nelas contido, como um modelo limite. Em muitos sistemas quânticos, certos aspectos da dinâmica global, já apresentam um comportamento limite clássico[2]. Tais sistemas são bem representados por modelos dinâmicos dotados com características mistas clássico - quânticas[3]. Devido à grande importância dos processos semi-clássicos na física atual, diversos modelos foram criados para interpretar as evidências experimentais deste tipo de comportamento dinâmico. Em particular, um grande esforço tem sido desenvolvido para a construção de modelos quasi-clássicos consistentes, úteis para o tratamento da colisão entre íons pesados[4]. Entretanto, na maior parte destes modelos quasi-clássicos construídos, os parâmetros que descrevem a parte do processo físico que pode ser aproximada classicamente, ou têm dinâmica dada a priori[5], ou são introduzidos de modo fenomenológico[6]. Também, em tais modelos, não é usual levar-se em conta a reação das variáveis dinâmicas, quânticas, sobre os parâmetros clássicos introduzidos. Este é o caso dos modelos abertos. Estamos interessados no importante caso dos modelos fechados. Neles, é possível tratar os parâmetros e suas derivadas temporais, como coordenadas e velocidades (ou momenta) de uma dinâmica complementar, em interação com os aspectos quânticos da dinâmica global. Um aspecto crítico é o de não se encontrar na literatura a análise de que modelos clássicos devam se constituir em limites de modelos semi-clássicos gerais. A importância destes modelos clássicos limites é a de que são pontos de partida naturais para a construção de métodos de quantização parcial.

O objetivo fundamental do presente trabalho é o de estabelecer um processo de quantização parcial para sistemas clássicos, dotados de uma estrutura Lagrangeana-Hamiltoniana. Com este objetivo, estende-se o princípio variacional clássico de Weiss[6], de modo a conter o caso de sistemas mistos, Lagrangeanos-Hamiltonianos. As equações variacionais, provenientes do princípio estendido, são constituídas por uma equação de Hamilton-Jacobi, acoplada a um sistema complementar de equações, da forma de Euler-Lagrange. Este sistema é obtido como consequência de variações convenientes no princípio estendido de Weiss. A função dinâmica fundamental presente a este sistema é a função de Routh. Por meio de um *ansatz*, que é essencialmente um princípio de correspondência, propõe-se uma equação de onda generalizada, constituída de uma equação do tipo Schrödinger, acoplada a um sistema de equações do tipo Euler-Lagrange. O operador fundamental presente a esta família de equações é um operador de Routh. Este operador define um modelo semi-clássico fechado onde se descreve a interação de uma dinâmica quântica Hamiltoniana com uma dinâmica Lagrangeana, parametrizada, clássica.

2. PARÂMETROS E VARIÁVEIS NA DESCRIÇÃO DE SISTEMAS ABERTOS E FECHADOS

Consideremos o espaço de configurações Euclideano, E_n, de um sistema dinâmico clássico, a n graus de liberdade. Os pontos deste espaço podem ser representados por coordenadas reais, cartesianas, ortogonais, x^r, $r = 1,\dots,n$; usualmente são indicados pela ênupla ordenada $(x^1,\dots,x^n)$.

Definamos uma transformação T de coordenadas, regular, real, que mude as x^r em novas coordenadas cartesianas:

$$\{x^r\} \xrightarrow{T} \{x^j;\ x^J\}\ ; \qquad (2.1)$$

$$j = 1,\dots,n-r\ ;\ J = 1,\dots,r.$$

Por conveniência, admitiremos que T seja tal que as r coordenadas $\{x^J\}$ sejam ortogonais às $n-r$ coordenadas $\{x^j\}$. Com esta construção, E_n fica partido em dois sub-espaços ortogonais, complementares, $E_{(r)}$ e $E_{(n-r)}$, respectivamente associado aos sub-sistemas de coordenadas $\{x^J\}$ e $\{x^j\}$. A utilidade desta partição ficará óbvia quando estudarmos a dinâmica n-dimensional, representada no sub-espaço $E_{(n-r)}$. Neste caso as $(n-r)$ coordenadas $\{x^j\}$ definem a configuração do sistema, enquanto que as demais r coordenadas $\{x^J\}$, definem parâmetros, de modo que toda trajetória dinâmica descrita em E_n passa a ser descrita por uma trajetória definida em $E_{(n-r)}$ e dependente de r parâmetros x^J. Esta é a descrição dinâmica feita pela classe de observadores imersos em E_{n-r}. Entretanto, a evolução temporal dos parâmetros $\{x^J\}$ deverá ser definida, a fim de que a dinâmica projetada em E_{n-r} fique bem descrita. Esta condição subsidiária pode ocorrer de dois modos:

(a) a dinâmica paramétrica é descrita na forma de equações subsidiárias de movimento, envolvendo apenas os parâmetros $\{x^j\}$ e independendo das variáveis dinâmicas $\{x^J\}$. Nesta hipótese, a dinâmica paramétrica influi na dinâmica das variáveis $\{x^j\}$, mas não sofre a influência desta. A este modelo dinâmico, chamaremos de "aberto" e é aquele usualmente encontrado na literatura[7]. Neste modelo, as equações paramétricas, subsidiárias, podem ser consideradas como condições de contorno dependentes do tempo e representadas na forma diferencial.

(b) As equações de movimento subsidiárias envolvem os parâmetros $\{x^J\}$ e as próprias variáveis dinâmicas $\{x^j\}$. Neste caso a dinâmica paramétrica interage com a dinâmica das variáveis $\{x^j\}$. As equações paramétricas subsidiárias podem ser consideradas como condições de contorno em interação com o sistema representado pelas variáveis do tipo $\{x^j\}$. A este modelo, chamaremos de "fechado".

O caso (a) pode ser considerado como um aspecto limite do caso (b) e é o caso frequente de acoplamento entre sistemas encontrado na literatura[8].

Vamos construir um modelo dinâmico fechado, que descreva a interação de sistemas Hamiltonianos, com dinâmicas paramétricas, subsidiárias, Lagrangeanas.

3. O ESPAÇO SUPORTE DE UMA DINÂMICA LAGRANGEANA-HAMILTONIANA

O espaço suporte onde é definida uma dinâmica, depende da estrutura particular desta. Assim, se a dinâmica for de estrutura Lagrangeana, o espaço suporte será um espaço de configuração, enquanto no caso de uma dinâmica Hamiltoniana, o espaço suporte correspondente será um espaço de fase. Consideremos uma função Lagrangeana L, dotada de um espaço suporte do tipo E_n, onde está definida uma partição do tipo (2.1). A função L será da forma:

$$L = L(x^j, \dot{x}^j \ ; \ x^J, \dot{x}^J \ ; \ t) \tag{3.1}$$

$$j = 1,\ldots,n-r \ ; \ J = 1,\ldots,r \ ;$$

onde

$$\dot{x}^j = \frac{dx^j}{dt} \quad ; \quad \dot{x}^J = \frac{dx^J}{dt} \ ;$$

t sendo o tempo.

Estamos interessados em construir modelos capazes de representar a dinâmica de sistemas Hamiltonianos em interação com condições de contorno, representadas Lagrangeanamente por meio de parâmetros. A existência de parâmetros e suas velocidades na Hamiltoniana de um sistema, indica que este não está isolado. A reação do sistema Hamiltoniano, sobre a dinâmica paramétrica, Lagrangeana, acoplada, será tratável dinamicamente, se as equações de movimento Lagrangeanas, subsidiárias, forem acopladas à dinâmica Hamiltoniana que rege o sistema. Entretanto, uma estrutura dinâmica Hamiltoniana-Lagrangeana exige um espaço suporte, que seja em parte de fase e em parte de configuração. Portanto, o princípio variacional que gerar as equações de movimento de uma tal dinâmica híbrida deverá ser formulado em um espaço suporte, produto cartesiano de um sub-espaço de fase por um sub-espaço de configuração.

O princípio variacional de Weiss[6], além de generalizar o princípio de Hamilton, é formalmente mais conveniente que este, particularmente quando se tem em vista uma posterior quantização do modelo clássico construído. Entretanto, o princípio de Weiss é formulado para estruturas dinâmicas definidas em espaços suporte do tipo configuração, ou fase[6]. Devemos então, procurar estender o princípio de Weiss, para o caso de espaços suporte do tipo misto, configuração-fase. Para isto, com auxílio de uma transformação de Legendre[9], parcial, $(n-r)$- dimensional, tranformemos a Lagrangeana L, (3.1) em uma Lagrangeana parcialmente canônica R:

$$R = R(x^j, p_j \; ; \; x^J, \dot{x}^J \; ; \; t) \; ; \tag{3.2}$$

onde as $(n-r)$ velocidades, $\dot{x}^j$ em L, aparecem substituídas pelos $(n-r)$ momenta $p_j = \partial L/\partial\dot{x}^j$ em R; a forma de R sendo:

$$R(x^j, p_j; x^J, \dot{x}^J; t) = \sum_{j=1}^{n-r} p_j \dot{x}^j - L(x^j, \dot{x}^j; x^J, \dot{x}^J; t) \; , \tag{3.3}$$

com

$$\dot{x}^j = x^j(x^i, p_j \; ; \; x^J, \dot{x}^J \; ; \; t) \; . \tag{3.4}$$

Estamos supondo que a matriz $(n-r)$ dimensional

$$\left(\frac{\partial p_j}{\partial \dot{x}^\ell} \right) \qquad j, \ell = 1, \ldots, n-r \tag{3.5}$$

seja regular, o que é uma condição necessária para a existência da condição (3.4).

A Lagrangeana parcialmente canônica R, (3.3), tem estrutura dinâmica idêntica à de uma função de Routh[10] e o e espaço suporte em que está definida é um espaço, $E_r \otimes F_{2(n-r)}$, produto cartesiano em um espaço r-dimensional, de configuração, por um espaço $2(n-r)$-dimensional, de fase. O espaço E_r é aquele descrito pelas r coordenadas x^J, enquanto que o espaço $F_{2(n-r)}$ é aquele descrito pelas $2(n-r)$ coordenadas x^j, p_j.

Nesta representação, as trajetórias dinâmicas são curvas $x^J(t)$, $x^j(t)$, $p_j(t)$; $J = 1,\ldots,r$; $j = 1,\ldots,n-r$, descritas no espaço $E_r \otimes F_{2(n-r)}$, extremais do correspondente princípio variacional.

4. O PRINCÍPIO ESTENDIDO DE WEISS PARA ESPAÇOS SUPORTE DA FORMA $E_r \otimes F_{2(n-r)}$

Vamos construir um princípio variacional na forma de Weiss, estendido para o caso de um espaço suporte do tipo $E_r \otimes F_{2(n-r)}$. O princípio estendido regerá a dinâmica de sistemas clássicos, parcialmente Hamiltonianos, dependentes parametricamente de uma dinâmica Lagrangeana subsidiária e em interação com esta dinâmica. O princípio variacional será construído com a Lagrangeana parcialmente canônica R, definida em (3.3).

Consideremos, então, a integral de ação, $S[C]$, definida para uma curva arbitrária C, de $E_r \otimes F_{2(n-r)}$, no intervalo $[t_1, t_2]$:

$$S[C] = \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{j=1}^{n-r} p_j \dot{x}^j - R(x^j, p_j; x^J, \dot{x}^J; t)\right] dt \qquad (4.1)$$

Na forma variacional de Weiss, a ação tem os extremos variáveis e a variação é da forma

$$\Delta = \delta + \Delta t \frac{d}{dt} ; \qquad (4.2)$$

onde

$$\delta \frac{d}{dt} = \frac{d}{dt} \delta .$$

Então:

$$\Delta S[C] = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{j=1}^{n-r} p_j \dot{x}^j - R\right] dt + \left[\left(\sum_{j=1}^{n-r} p_j \dot{x}^j - R\right) \Delta t\right]_{t_1}^{t_2} =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{j=1}^{n-r} \delta p_j \left(\dot{x}^j - \frac{\partial R}{\partial p_j}\right) - \sum_{j=1}^{n-r} \delta x^j \left(\dot{p}_j + \frac{\partial R}{\partial x^j}\right) - \right.$$

$$\left. \sum_{J=1}^{r} \delta x^J \left[\frac{\partial R}{\partial x^J} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{x}^J}\right)\right]\right] dt +$$

$$\left[\sum_{j=1}^{n-r} (p_j \dot{x}^j - R) \Delta t + \sum_{j=1}^{n-r} p_j \, \delta x^j - \sum_{J=1}^{r} \frac{\partial R}{\partial \dot{x}^J} \delta x^J\right]_{t_1}^{t_2} \qquad (4.3)$$

O caso do princípio variacional estendido, na forma de Hamilton, será obtido se restringirmos, em (4.2), Δ a coincindir com δ. Neste caso particular se considerarmos $\tilde{\mathcal{C}}$, como sendo a trajetória dinâmica do sistema no intervalo $[t_1, t_2]$, teremos:

$$\delta[\tilde{\mathcal{C}}] = 0 \tag{4.4}$$

Como temos agora, condições de extremos fixas:

$$\begin{aligned} \delta p_j(t_1) &= \delta p_j(t_2) = 0 \ , \\ \delta x^j(t_1) &= \delta x^j(t_2) = 0 \ , \\ \delta x^J(t_1) &= \delta x^J(t_2) = 0 \ , \\ \Delta t_1 &= \Delta t_2 = 0 \ , \end{aligned} \tag{4.5}$$

e levando-se em conta a arbitrariedade das variações δ no intervalo aberto (t_1, t_2), virá:

$$\begin{aligned} \dot{x}^j &= \frac{\partial R}{\partial p_j} \ ; \\ \dot{p}_j &= \frac{\partial R}{\partial x^j} \ ; \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{x}^J}\right) - \frac{\partial R}{\partial x^J} &= 0 \ ; \end{aligned} \tag{4.6}$$

para $j = 1,\ldots,n-r$; $J = 1,\ldots,r$.

As equações de movimento (4.6), coincidem com as bem conhecidas equações de Routh[10].

Consideremos agora, no intervalo $[t_1, t_2]$ o arco de extremal $\tilde{C}$, mas liberemos os extremos. Então, para $C \equiv \tilde{\mathcal{C}}$, a (4.3) ficará, com auxílio de (4.2):

$$\Delta S[\tilde{C}] = \left[\sum_{j=1}^{n-r} p_j \Delta x^j - R\Delta t - \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial R}{\partial \dot{x}^J}\, \delta x^J\right]_{t_1}^{t_2} \tag{4.7}$$

Entretanto, queremos que a ação S, (4.2), caracterize uma dinâmica Hamiltoniana, representada pelas variáveis canônicas x^j , p_j , sujeita a condições de contorno, Lagrangeanas, com as quais interage, representadas pelas variáveis x^J, $J = 1,\ldots,r$. Este tipo de condicionamento, restringe as variações de extremos, em (4.3), a serem variações totalmente imersas em $F_{2(n-r)}$. Com este vínculo, estaremos condicionando a Lagrangeana parcialmente canônica R, a ser o gerador das translações infinitesimais da dinâmica canônica x^j, p_j; $j = 1,\dots,n-r$; dependendo parametricamente de uma dinâmica Lagrangeana, que atua como vínculo dinâmico e com a qual interage. Como veremos, a própria R se comporta como Lagrangeana (a menos de um sinal) desta dinâmica subsidiária. Então, devemos agregar à (4.7), as condições de contorno:

$$\delta x^J(t_1) = \delta x^J(t_2) = 0 \qquad (4.7')$$
$$J = 1,\dots, r \quad .$$

Com a restrição supra, a (4.7) ficará:

$$\Delta S[\tilde{C}] = \left[\sum_{j=1}^{n-r} p_j \Delta x^j - R\Delta t\right]_{t_1}^{t_2} \qquad (4.8)$$

$$\delta x^J(t_1) = \delta x^J(t_2) = 0, \quad j = 1,\dots,r \; .$$

Mas, entre os instantes t_1 e t_2, arbitrários, valem as equações de Routh, (4.6), que foram obtidas fixando-se os extremos e, em particular, tomando-se $\delta x^J(t_1) = \delta x^J(t_2) = 0$.

Estas últimas condições, equivalem a manter válidas as r equações:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{x}^J}\right) - \frac{\partial R}{\partial x^J} = 0, \quad \text{para} \quad J = 1,\dots, r \; .$$

Então, vamos substituir, no sistema (4.8) os vínculos $\delta x^J(t_1) = \delta x^J(t_2) = 0$, por condições vinculares, dinâmicas, equivalentes:

$$\Delta S[\tilde{C}] = \left[\sum_{j=1}^{n-r} p_j \Delta x^j - R\Delta t\right]_{t_1}^{t_2} \; ;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{x}^J}\right) - \frac{\partial R}{\partial x^J} = 0 \; ; \qquad (4.9)$$

$$J = 1,\dots, r \; .$$

O sistema (4.9) é a expressão analítica do princípio de Weiss, estendido para o caso de sistemas Hamiltonianos dependentes de parâmetros e em interação com esta dinâmica paramétrica. Em (4.9), os parâmetros são considerados como coordenadas de uma dinâmica subsidiária, Lagrangeana, interpretada como condição de contorno, em interação dinâmica com o sistema canônico considerado.

O acoplamento entre as duas dinâmicas, está contido, essencialmente, no fato de que a função R ocorre, tanto nas equações paramétricas, quanto na variação $\Delta S[\tilde{C}]$.

5. O SISTEMA DE EQUAÇÕES GERADAS PELO PRINCÍPIO ESTENDIDO DE WEISS

A partir de (4.9), podemos construir um sistema de equações de movimento, constituído pelas r equações de Lagrange, contidas em (4.9), acrescidas de uma equação diferencial parcial, do tipo Hamilton-Jacobi, extraída de $\Delta S[\tilde{C}]_{t_1}^{t_2}$. De fato, arbitremos em

$$\Delta S[\tilde{C}] = \left[\sum_{j=1}^{n-r} p_j \Delta x^j - R\Delta t\right]_{t_1}^{t_2}$$

$$\Delta t_1 = 0, \quad \text{e} \quad \Delta x^j(t_1) = 0 \quad \text{para } j = 1,\ldots,n-r$$

liberando-se, entretanto, Δt_2 e $\Delta x^j(t_2)$ e chamando t_2 de t, virá, pela independência das variações:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -R \; ; \quad p_j = \frac{\partial S}{\partial x^j} \; ; \qquad (5.1)$$

$$j = 1,\ldots,n-r \; .$$

As equações (5.1) se acoplam, agora, às equações de Lagrange restantes em (4.9), de modo que obtemos o sistema de equações de movimento:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + R = 0 \quad ;$$

$$p_j = \frac{\partial S}{\partial x^j} \quad ; \quad j = 1,\ldots,n-r \qquad (5.2)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{x}^J}\right) - \frac{\partial R}{\partial x^J} = 0 \ ,$$

com

$$S = S\left[x^j(t\ ) \ ; \ x^J(t) \ ; \ \dot{x}^J(t) \ ; \ t\right]$$

$$R = R\left[x^j(t) \ ; \ \frac{\partial S}{\partial x^j(t)} \ ; \ x^J(t) \ , \ \dot{x}^J(t) \ ; \ t\right]$$

O sistema (5.2) é uma consequência direta do princípio estendido de Weiss. Sob certas condições[11], é possível partir do sistema (5.2), a fim de se obter o sistema (4.6), de Routh. Entretanto, objetivando a construção de um princípio de correspondência para a quantização parcial da dinâmica Lagrangeana-Hamiltoniana, aqui construída, a forma (5.2) é de fundamental relevância. Também é possível[11], com auxílio de uma conveniente transformação dual de Legendre, passar do sistema (5.2) para um sistema constituído por duas equações diferenciais parciais, do tipo Hamiltonon-Jacobi, mas envolvendo a função de Routh. Nesta transformação de Legendre, as variáveis x^J, p_j , x^j são tomadas como passivas, mas as $\dot{x}^J$ são transformadas em p_j, onde

$$p_J = -\frac{\partial R}{\partial \dot{x}^J} \ . \qquad (5,2')$$

A função R não é uma constante de movimento porque, mesmo que $\partial L/\partial t = 0$, R envolve uma dependência temporal, através da presença dos parâmetros $x^J(t)$ e $\dot{x}^J(t)$. Este fato faz com que a dinâmica Lagrangeana-Hamiltoniana clássica construída, seja útil no estudo de processos dinâmicos dissipativos clássicos, sem que se introduza, a priori, um modelo fenomenológico.

6. O ANSATZ

O limite clássico de uma equação de Schrödinger é uma equação clássica do tipo Hamilton-Jacobi[1]. O sistema (5.2) é constituído de uma equação do tipo Hamilton-Jacobi, acoplada a uma família de equações do tipo Euler-Lagrange, o acoplamento sendo determinado pela função de Routh. Estamos interessados em construir um sistema de equações quânticas que admita (5.2) como limite clássico. É bastante natural a hipótese de que o sistema quântico a construir seja constituído de uma equação de Schrödinger, acoplada a uma família de equações formalmente análogas a equações de Euler-Lagrange, o acoplamento sendo determinado por um operador dotado com uma estrutura Routhiana. Em particular, estamos interessados em estabelecer as equações básicas de uma dinâmica quântica semi-clássica, isto é, uma dinâmica de observáveis em interação, que podem ser grupados em duas classes gerais:

a) uma classe de operadores do tipo "*q-number*" ;

b) uma classe de operadores do tipo "*c-number*" .

Os operadores da classe (a) deverão caracterizar de algum modo o comportamento quântico da dinâmica, enquanto os operadores da classe (b) deverão caracterizar os aspectos clássicos da mesma dinâmica.

A estrutura do formalismo clássico Routhiano desenvolvido neste trabalho, nos induz à construção de um modelo semi-clássico, onde a classe dos operadores do tipo (a) venha associada ao comportamento Hamiltoniano, quântico, da dinâmica global, enquanto a classe (b) caracterize o comportamento Lagrangeano, clássico.

O espaço de Hilbert, do modelo assim construído, é um espaço vetorial de estados quânticos dependentes, parametricamente, das variáveis Lagrangeanas, clássicas, associadas ao aspecto clássico da dinâmica global.

Suponhamos as coordenadas de fase, x^j, p_j, $j = 1,\ldots, n-r$, cartesianas ortogonais; para quantizar, parcialmente, o sistema clássico (5.2), vamos propor o seguinte *ansatz*

1) As variáveis canônicas básicas, reais, x^j, p_j, $j = 1,\ldots,$ $n-r$, são substituídas pelos correspondentes operadores Hermitianos, usuais $\hat{x}^j = x^j$; $\hat{p}_j = -i\hbar \dfrac{\partial}{\partial x^j}$;

2) as variáveis básicas, Lagrangeanas, x^J, $\dot{x}^J$, $J = 1,\ldots,r$, devem manter o mesmo comportamento Lagrangeano clássico, mas agora são reinterpretados como operadores Hermitianos do tipo "*c-number*";

3) a função real de Routh, $R(x^j, p_j; x^J, \dot{x}^J; t)$ é substituída pelo correspondente operador Hermitiano, de Routh:

$$\hat{R}(\hat{x}^j, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x^j} ; x^J, \dot{x}^J; t) \;;$$

4) a equação $\partial S/\partial t + R = 0$, é substituida pela equação de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{R}\Psi \,,$$

onde $\Psi = \Psi(x^j \,;\, x^J, \dot{x}^J \,; t)$, os x^j sendo autovalores do correspondente operador de posição $\hat{x}^j$;

5) as r equações, clássicas, de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{x}^J}\right) - \frac{\partial R}{\partial x^J} = 0 \,,$$

são substituídas por r equações, formalmente idênticas, mas envolvendo o operador $\hat{R}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \hat{R}}{\partial \dot{x}^J}\right) - \frac{\partial \hat{R}}{\partial x^J} = 0 \quad ; \quad J = 1,\ldots, r.$$

Com o *ansatz* proposto, o sistema (5.2) é substituído pela equação de onda generalizada:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{R}\Psi \;;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \hat{R}}{\partial \dot{x}^J}\right) - \frac{\partial \hat{R}}{\partial x^J} = 0 \,. \qquad (6.1)$$

O sistema, (6.1), generaliza a equação de Schrödinger para o caso da interação entre uma dinâmica clássica Lagrangeana, e uma dinâmica quântica Hamiltoniana, não relativistas, envolvendo um número finito de graus de liberdade. O acoplamento é dado pelo operador de Routh, $\hat{R}$, que é um operador misto, apresentando simultaneamente características de "*q-number*" e de "*c-number*".

$\hat{R}$ não é uma constante de movimento, e seu espectro de autovalores e de autovetores (*é um espectro de energia*) varia no tempo, através de sua dependência nos parâmetros x^J e $\dot{x}^J$. Este aspecto torna o sistema (4.1), útil para o tratamento de processos dissipativos que ocorrem na interação de um sistema quântico, descrito Hamiltonianamente, com um sistema clássico, descrito Lagrangeanamente, o sistema global sendo considerado fechado.

7. CONCLUSÕES

O *ansatz* proposto neste trabalho, baseou-se na dinâmica Routhiana, clássica, construída. Esta estrutura formal, clássica, Routhiana, induziu um correspondente formalismo Routhiano quântico, semi-clássico. Mas, um *ansatz* é apenas uma hipótese de trabalho, de modo que será importante obter o sistema de equações (6.1), como decorrência de um princípio variacional semi-clássico. Este resultado, uma vez obtido dará, certamente, ao modelo Routhiano semi-clássico (6.1), uma fundamentação teórica muito mais sólida. Este tratamento variacional está em fase de construção e será apresentado em um próximo trabalho.

Aplicações do modelo teórico, aqui elaborado, estão sendo desenvolvidas e serão apresentadas, também, em trabalhos subsequentes.

REFERÊNCIAS

1. R. Finkelstein, *Nonrelativistic Mechanics*, W.A. Benjamin Inc., London (1973).
2. R. Schiller, Phys. Rev. *125*, 1100 (1962).
3. F. Villars, Nucl. Phys. A *285*, 269 (1977).

4. J. de Boer *et.al.*, J. Phys. G. 3, nº 7, 889 (1977).
5. K. Dietrich, *Heavy-Ion, High Spin States and Nuclear Structure*, vol. 1, I.A.E.A., Vienna, 77 (1975).
6. E.C.G. Sudarshan, *Classical Dynamics*, John Wiley, New York (1974).
7. E.B. Davies, *Quantum Theory of Open Systems*, Academic Press, N. York (1976).
8. E.A. Power, *Introductory Quantum Electrodynamics*, Longmans, London (1964).
9. C. Lanczos, *The Variational Principles of Mechanics*, University of Toronto Press, Toronto (1970).
10. F. Gantmacher, *Lectures in Analytical Mechanics*, MIR Publishers, Moscow (1970).
11. Paulo C. Soares Filho, *Um Formalismo Misto Hamiltoniano-Lagrangeano para o Tratamento de Sistemas Semi-Clássicos*, Tese de Mestrado, Instituto de Física da UFRJ, Rio de Janeiro (1978).