Revista Brasileira de Física, Vol. 8, Nº 3, 1978

Comportamento Assintótico dos Fatores de Forma*

CARLOS ANTONIO NOVAIS FARIA e RAJAT CHANDA
Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro

Recebido em **25** de Agosto de 1978

We study the asymptotic behaviour of elastic form factors by applying Callan-Symanzik equations to the coefficient functions in the light-cone expansion of the product of two operators. Instead of studying specific models of hadrons which make the inhomogeneous mass term in the Callan-Symanzik equations negligible we attempt to concentrate on the general conditions under which the power law behaviour controlled by the anomalous dimensions of the field operators is obtained.

Estudamos o comportamento assintótico de fatores de forma elásticos aplicando as equações de Callan-Symanzik as funções coeficientes da expansão no cone de luz do produto de dois operadores. Em lugar de estudar modelos específicos de hadrons que fazem o termo inomogêneo de massa das equações de Callan-Sumanzik desprezível, concentramo-nos nas condições gerais sob a quais o comportamento tipo potência controlado pelas dimensões anômalas dos operadores de campo é obtido.

1. INTRODUÇÃO

As técnicas de relações de dispersão (dispersion relation), geralmente empregadas no estudo dos fatores de forma, implicam no conhecimento do comportamento assintótico destes últimos. Este fato motivou sobremaneira o desenvolvimento de novos meios para a análise deste comportamento. Várias tentativas foram realizadas com o auxílio de métodos já aplicados com êxito em outras áreas, entretanto, nenhum destes trabalhos produziu

* Trabalho financiado em parte pelo CNPq e FINEP.

resultado definitivo. Por exemplo, a aplicação da equação Callan-Symanzik[1] a este problema[2,3] conduz ao resultado experimental somente naqueles casos em que o lado direito da equação é desprezível. Ainda que esta condição seja válida em vários modelos teóricos, em geral ela não é verdadeira.

As reações inclusivas, tais como o espalhamento inelástico lepton-nucleon, podem ser estudadas supondo-se predominância das singularidades existentes sobre o cone de luz. No caso dos fatores de forma ou de outros processos exclusivos, não existe prova geral da validade da hipótese anterior, contudo, o comportamento assintótico dos fatores de forma é ainda controlado por estas singularidades[4]. Em nosso estudo estamos interessados apenas no comportamento assintótico, portanto, justifica-se a adoção do referido resultado.

O produto de operadores de campo pode ser expandido na vizinhança do cone de luz em função de outros operadores. Neste trabalho estudamos o comportamento das funções coeficientes, provenientes desta expansão, no caso em que os campos originais descrevem partículas sobre a camada de massa (mass shell) em interação com uma corrente.

A amplitude que descreve a interação de duas partículas externcis com uma corrente pode ser decomposta em partes escalares, invariantes de Lorentz, chamados fatores de forma elásticos. Callan[5] e Coleman[6] mostraram que a expansão a pequenas distâncias de Wilson[7] controla o limite $q^2 \to \infty$ (q = quadri-momentum carregado pela corrente) dos fatores de forma na região de Euclides $q^2 = -(q_n^2 + q^2)$. Para a região física de Minkowski é necessário estudar diretamente o limite do cone de luz.

No limite assintótico os fatores de forma e as funções coeficientes da expansão no cone de luz podem ser relacionadas. Nosso trabalho procura estabelecer que restrições gerais são impostas a estas funções pela equação Callan-Symanzik quando se trabalha nesse limite.

Na seção 2, revemos a expansão do produto dos operadores no cone de luz que é uma generalização da expansão a pequenas distâncias e também apresentamos a equação de Callan-Symanzik para funções de n pontos.

A seção 3 é consagrada ao desenvolvimento do comportamento assintótico dos fatores de forma no limite procurado. O resultado obtido é que este comportamento é regulado pelas dimensões anômalas dos operadores envolvidos na expansão do cone de luz, principalmente pela dimensão mais baixa do operador bilocal encontrado.

2. EXPANSÃO NO CONE DE LUZ E EQUAÇÃO DE CALLAN-SYMANZIK

A expansão de Wilson do produto de operadores a pequenas distâncias pode ser generalizada para o caso do cone de luz (Brandt e Preparata[8]) tendo a seguinte forma:

$$A(x)\,B(y) \xrightarrow[(x^2-y^2)\to 0]{} f_n\left[(x-y)^2\right] O^{(n)}(x,y) \tag{1}$$

onde

$$O^{(n)}(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty} (x-y)^{\mu_1} (x-y)^{\mu_2} \dots (x-y)^{\mu_i}\, O^{(n)}_{\mu_1 \dots \mu_i}(x+y) \tag{2}$$

são operadores bilocais regulares em $x=y$ e $O^{(n)}_{\mu_1\dots\mu_n}$ são os operadores locais que aparecem na expansão a pequenas distâncias. Os coeficientes f_n são funções (c-números) contendo todas as singularidades do cone de luz. A expansão é suposta válida no sentido fraco, isto é, entre o *sandwich* de estados definidos.

Os operadores bilocais $O^{(n)}$ possuem dimensão d_n que pela análise dimensional da eq. (2) satisfazem a seguinte relação

$$d_n = d_i - i \tag{3}$$

onde d_i é a dimensão do operador local e i o número de índices de Lorentz no operador local. O *twist* de um tensor é igual à sua dimensão menos o número de índices de Lorentz, logo, todos os operadores locais que aparcem em (2) possuem o mesmo *twist*, cujo valor coincide com a dimensão do bilocal.

As singularidades dos coeficientes $f_n[(x-y)^2]$ são determinadas pelas simetrias exatas e quebra de simetrias da teoria, sendo a mais importante a **invariância** de escala.

Uma transformação de escala significa uma transformação nas coordenadas espaço-tempo x, do seguinte tipo:

$$x \to \lambda x \tag{4}$$

Estas transformações definem um grupo e **1-parâmetro** $U(\lambda)$ tal que os operadores $O(x)$ se transformam como:

$$U^{\dagger}(\lambda)\, O(x)\, U(\lambda) = \lambda^{d}\, O(\lambda x) \tag{5}$$

onde d é definido como a dimensão de escala de campo O. A **dimensão de escala** em geral **não** coincide com a dimensão **canônica** c, isto é, o operador O tem dimensão M^{c} em unidades de massa M, a coincidência ocorre para campos livres. A diferença entre a dimensão de escala e **canônica** é chamada dimensão anômala:

$$\gamma = d - c \tag{6}$$

Aplicando a transformação de escala em ambos os lados da eq. (1) obtemos:

$$f_n \xrightarrow[\lambda^2 \to 0]{} (\lambda^2)^{(-d_A-d_B+d_n)/2} \tag{7}$$

Os coeficientes f_n serão singulares se $d_A+d_b>d_n$ sendo, portanto,. os operadores bilocais de menor dimensão os mais importantes. A **equação** Callan-**Symanzik** essencialmente determina a variação que ocorre nas teorias de campo com massas, devida à mudança na escala de *momentum*. Esta equação, para grandes momentos do tipo-espaço, se reduz à forma diferencial das equações do grupo de renormalização de Gell **Mann-Low**[9].

Para uma função geral $\Gamma^{(n)}$ com n-pernas, multiplicativamente renormalizada, a equação Callan-Symanzik é:

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} - n\,\gamma(\lambda)\right] \Gamma^{(n)}(p_1,\ldots,p_n) = i\Gamma_{\Delta}^{(n)}(0,p_1,\ldots,p_n) \tag{8}$$

com

$$\beta(\lambda) = \mu \frac{\partial\lambda}{\partial\mu} \qquad e \qquad \gamma(\lambda) = \frac{1}{2}\mu\frac{\partial \ln Z}{\partial\mu} \tag{9}$$

sendo μ e λ, respectivamente, a massa e constante de acoplamento renormalizadas e $\Gamma_A^{(n)}$ é a função $\Gamma^{(n)}$ com inserção Δ correspondente à divergência da corrente de escala da teoria.

Esta equação, é claro, depende do modelo dinâmico utilizado para descrever a interação na função $\Gamma^{(n)}$. No entanto, podemos manter um tratamento geral sem particularizar para um dado modelo, permitindo na equação vários termos de massa correspondente às diversas partículas e vários termos @ para as diversas constantes de acoplamento λ do modelo. Com esta generalização a equação será:

$$\left[m_j \frac{\partial}{\partial m_j} + \beta_k \frac{\partial}{\partial\lambda_k} - n\gamma\right]\Gamma^{(n)} = i\Gamma_\Delta^{(n)} \tag{10}$$

onde empregamos a convenção de soma sobre índices repetidos.

3. COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO

Seja uma função de 3-pernas correspondente a duas partículas de momentos p_1 e p_2 sobre o mass-shell interagindo com uma corrente J. Consideremos o caso em que a corrente pode ser vetorial ou axial-vetorial e as partículas bosons ou fermions.

A função vértice $\Gamma^{(3)} = \langle 0|J(0)|p_1p_2 in\rangle$, pode ser escrita da seguinte forma, aplicando o esquema LSZ[10] para contrair as duas partículas:

$$\Gamma^{(3)} = \langle 0|J(0)|p_1p_2 in\rangle$$

$$= \int d^4x_1 d^4x_2 e^{ip_1x_1 + ip_2x_2} T* \langle 0|J(0)\phi(x_1)\phi(x_2)|0\rangle_A \tag{11}$$

onde ϕ é o campo da partícula e o índice A indica que o elemento de matriz deve ser considerado "amputado", isto é, sem os propagadores nas pernas externas.

Consideremos, agora, a função $\Gamma^{(3)}$ no limite em que os pontos x_1 e x_2 se acham sobre o cone de luz:

$$\lim_{(x_1-x_2)^2\to 0} \Gamma^{(3)} \longrightarrow \Gamma^{(3)}_{as} \tag{12}$$

Neste limite admitiremos que o produto dos campos $\phi(x_1)\phi(x_2)$ na eq.(11) tem uma expansão do tipo do cone de luz (eq. (1))

$$\phi(x_1)\phi(x_2) \xrightarrow[(x_1-x_2)^2\to 0]{} f_0(x_1-x_2)I+f_1(x_1-x_2)O(x_1,x_2) + \ldots \tag{13}$$

Introduzindo esta expansão na eq. (11) obtemos:

$$\Gamma^{(3)}_{as} = \int d^4x_1 d^4x_2 \, e^{ip_1x_1+ip_2x_2} f_1(x_1-x_2) T{*}\langle 0|J(0)O(x_1,x_2)|0\rangle_A \tag{14}$$

onde o termo da identidade é nulo poís $\langle 0|J(0)|0\rangle = 0$. Transformando para as seguintes variáveis do cone de luz,

$$\begin{aligned} x_+ &= x_1 + x_2 & P &= p_1 + p_2 \\ x_- &= x_1 - x_2 & q &= p_1 - p_2 \end{aligned} \tag{15}$$

vem:

$$\Gamma^{(3)}_{as} = \int d^4x_+ d^4x_- \, e^{iqx_-} e^{ipx_+} f_1(x_-) T{*}\langle 0|J(0)O(x_+,x_-)|0\rangle_A \tag{16}$$

O operador bilocal $O(x_+,x_-)$, conforme a eq.(2), é dado por

$$O(x_-,x_+) = \sum_{n=0}^{\infty} x_-^{\mu_1} \cdots x_-^{\mu_n} O_{\mu_1\ldots\mu_n}(x_+) \ . \tag{17}$$

Substituindo na equação anterior vem

$$\Gamma_{as}^{(3)} = \int d^4x_- d^4x_+ e^{iqx_- + ipx_+} f_1(x_-^2) T{*}\langle 0|J(0) \sum_{n=0}^{\infty} x_-^{\mu_1} \ldots x_-^{\mu_n} O_{\mu_1 \ldots \mu_n}(x_+)|0\rangle_A . \tag{18}$$

Supondo a série uniformemente convergente podemos trocar a ordem da soma pela integral:

$$\Gamma_{as}^{(3)} = \sum_{n=0}^{\infty} \int d^4x_- e^{iqx_-} f_1(x_-^2) x_-^{\mu_1} \ldots x_-^{\mu_n} \int d^4x_+ e^{ipx_+} T{*}\langle 0|J(0) O_{\mu_1 \ldots \mu_n}(x_+)|0\rangle_A . \tag{19}$$

Mas

$$\begin{aligned} \int d^4x_- e^{iqx_-} f_1(x_-^2) x_-^{\mu_1} \ldots x_-^{\mu_n} &= \frac{i^n \partial}{\partial q^{\mu_1}} \ldots \frac{\partial}{\partial q^{\mu_n}} \int d^4x_- e^{iqx_-} f_1(x_-^2) \\ &= \frac{i^n \partial}{\partial q^{\mu_1}} \ldots \frac{\partial}{\partial q^{\mu_n}} f(q^2) \end{aligned} \tag{20}$$

onde $f(q^2)$ é a transformada de Fourier de $f_1(x_-^2)$ e também:

$$\int d^4x_+ e^{ipx_+} T{*}\langle 0|J(0) O_{\mu_1 \ldots \mu_n}(x_+)|0\rangle_A = \Gamma^{(1)}_{O_{\mu_1 \ldots \mu_n}}(p) \tag{21}$$

onde $\Gamma^{(1)}_{O_{\mu_1 \ldots \mu_n}}$ é a função $\Gamma^{(1)}$ correspondente à corrente J com a inserção do operador $O_{\mu_1 \ldots \mu_n}$.

Temos então

$$\Gamma_{as}^{(3)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \partial}{\partial q^{\mu_1}} \ldots \frac{\partial}{\partial q^{\mu_n}} f(q^2) \Gamma^{(1)}_{O_{\mu_1 \ldots \mu_n}}(p) \tag{22}$$

O valor assintótico do fator de forma que é a parte escalar invariante de $\Gamma^{(3)}_{as}$ está relacionado com o comportamento de $f(q^2)$ como mostra a última equação. O limite assintótico $q^2 \to \infty$ no espaço dos momentos equivale ao limite do cone de luz $x_-^2 \to 0$, do espaço das configurações. No que segue omitimos o índice (as) ficando, entretanto, subentendido que as expressões têm significado neste limite.

Consideremos a equação de Callan-Symanzik para a função vértice em estudo.

De acordo com a eq. (10) temos:

$$\left[m_j \frac{\partial}{\partial m_j} + \beta_k(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda_k} - 2\gamma_\phi\right]\Gamma^{(3)} = i\Gamma^{(3)}_\Delta \tag{23}$$

A corrente J é suposta conservada ou parcialmente conservada.

Uma equação análoga à eq. (22) pode ser deduzida para a função com inserção A:

$$\Gamma^{(3)}_\Delta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \partial}{\partial q^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial q^{\mu_n}} f(q^2)\,\Gamma^{(1)}_{\Delta,O_{\mu_1\ldots\mu_n}}(p) \tag{24}$$

A equação Callan-Symanzik para a função $\Gamma^{(1)}_{O_{\mu_1\ldots\mu_n}}$ é:

$$\left[m_j \frac{\partial}{\partial m_j} + \beta_k(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda_k} - \gamma_O\right]\Gamma^{(1)}_{O_{\mu_1\ldots\mu_n}} = i\Gamma^{(1)}_{\Delta,O_{\mu_1\ldots\mu_n}} \tag{25}$$

onde escrevemos γ_O, dimensão anômala do operador bilocal $O(x_-,x_+)$ em lugar da dimensão anômala de $O_{\mu_1\ldots\mu_n}$ pois elas são iguais, já que a diferença entre esses operadores é um produto de x^μ cuja dimensão anômala é nula. A dimensão do bilocal O que coincide com o *twist* de $O_{\mu_1\ldots\mu_n}$ é que possui significado físico relevante.

Substituindo as equações (22) e (24) em (23) vem:

$$\left[m_j \frac{\partial}{\partial m_j} + \beta_k(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda_k} - 2\gamma_\phi\right] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \partial}{\partial q^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial q^{\mu_n}} f(q^2) \Gamma^{(1)}_{O_{\mu_1 \ldots \mu_n}}(p) =$$

$$i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \partial}{\partial q^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial q^{\mu_n}} f(q^2) \Gamma^{(1)}_{\Delta, O_{\mu_1 \ldots \mu_n}} \tag{26}$$

Como a equação Callan-Symanzik é linear temos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Gamma^{(1)}_{O_{\mu_1 \ldots \mu_n}}(p) \frac{i^n \partial}{\partial q^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial q^{\mu_n}} \left[m_j \frac{\partial}{\partial m_j} + \beta_k(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda_k} - 2\gamma_\phi\right] f(q^2) +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \partial}{\partial q^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial q^{\mu_n}} f(q^2) \left[m_j \frac{\partial}{\partial m_j} + \beta_k(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda_k} - 2\gamma_\phi\right] \Gamma^{(1)}_{O_{\mu_1 \ldots \mu_n}}(p) =$$

$$i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \partial}{\partial q^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial q^{\mu_n}} f(q^2) \Gamma^{(1)}_{\Delta, O_{\mu_1 \ldots \mu_n}}(p) \tag{27}$$

Usando a equação (25) obtemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Gamma^{(1)}_{O_{\mu_1 \ldots \mu_n}}(p) \frac{i^n \partial}{\partial q^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial q^{\mu_n}} \left[m_j \frac{\partial}{\partial m_j} + \beta_k(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda_k} - 2\gamma_\phi + \gamma_O\right] f(q^2) = 0 \tag{28}$$

Escolhendo o conjunto de operadores $O_{\mu_1 \ldots \mu_n}$ linearmente independente, as funções $\Gamma^{(1)}_{O_{\mu_1 \ldots \mu_n}}$ serão linearmente independentes, o que implica que cada termo da série anterior deve ser nulo; como isto deve ocorrer para qualquer n infinitamente grande, temos:

$$\left[m_j \frac{\partial}{\partial m_j} + \beta_k(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda_k} - 2\gamma_\phi + \gamma_0\right] f(q^2) = 0 \tag{29}$$

A solução desta equação com $\gamma' = 2\gamma_\phi - \gamma_0$, é:

$$f(q^2) = (q^2)^{c_f/2} f^{(n)}(\lambda'_j)\exp\left[-\int_0^t dt'\gamma'(\lambda'_j)\right] \tag{30}$$

onde c_f = dimensão canônica de $f(q^2)$

$$t = \frac{1}{2} \ln (q^2/m^2)$$

onde

$$m^2 = p_1^2 = p_2^2$$

$$\frac{d\lambda'_j}{dt} = \beta_j(\lambda'_j) \quad \text{com} \quad \lambda'_j(h_j,t) = h_j \quad \text{para } t=0 \tag{31}$$

Se os vários termos β_j possuem zeros:

$$\beta_j(\lambda_j^f) = 0$$

com (32)

$$\lambda_j^f = \lim_{t\to\infty} \lambda_j$$

Temos, então:

$$f(q^2) \sim \left(\frac{q^2}{m^2}\right)^{[c_f - \gamma']/2}$$

(33)

$$f(q^2) \sim \left(\frac{q^2}{m^2}\right)^{[c_f - 2\gamma_\phi + \gamma_0]/2}$$

onde os γ são calculados em $\lambda_j = \lambda_j^f$.

Este é o nosso resultado principal: o comportamento assintótico da transformada de Fourier dos coeficientes na expansão no cone de luz é regulado pelas dimensões anômalas dos campos da teoria.

Podemos ainda expressar este resultado em termos das dimensões de escala dos operadores:

$$f(q^2) \sim \left(\frac{q^2}{m^2}\right)^{[-2d_\phi^E + d_O^E]/2} \qquad (34)$$

Ou, transformando para o espaço das configurações, temos:

$$f(x_-^2) \sim (x_-^2)^{[2d_\phi^E - d_O^E]/2} \qquad (35)$$

4. CONCLUSAO

Na terceira seção mostramos que a introdução da hipótese de expansão no cone de luz regula o comportamento assintótico dos fatores de forma em termos das dimensões de escala destes operadores. A forma deste comportamento é determinada pela equação de Callan-Symanzik. O tratamento utilizado é bastante geral e inclui fatores de forma de qualquer partícula representada por um campo (fermion ou boson) interagindo com uma corrente escalar, vetorial ou axial-vetorial. A interação é considerada também num nível geral.

Na expansão a pequenas distâncias tratamos somente com operadores locais e as transformadas de Fourier podem ser efetuadas facilmente. No limite do cone de luz encontramos operadores bilocais cuja transformada de Fourier para o espaço dos *momentum* é complicada pela mistura das variáveis do cone de luz; entretanto, a dificuldade pode ser contornada expandindo-se estes operadores numa série infinita de operadores locais, como é usual na expansão do cone de luz.

O resultado obtido é que o comportamento assintotico é da seguinte forma:

$$(q^2/m^2)^{-d_\phi + (1/2)d_O}$$

Nesta expressão d é a dimensão de escala cuja parte anômala deve ser avaliada num ponto fixo do espaço das constantes de acoplamento; ϕ é o campo associado à partícula e O o operador bilocal proveniente do cone de luz. Este resultado é análogo ao obtido no limite de pequenas distâncias ($x\to 0$) sendo que neste último caso em lugar de d_O temos d_{O_i} que é a dimensão de escala do operador local O_i. Na verdade, os dois resultados coincidem na aproximação mais importante, pois, nesta situação, o operador local mais significativo é o de menor dimensão e o valor desta dimensão coincide com o seu *twist* (número de índices de Lorentz nulo) que é a dimensão do bilocal O.

REFERÊNCIAS

1. C. G. Callan, Phys. Rev. *D2*, 1541 (1970), K. Symanzik, Commun Math Phys 18, 227 (1970).
2. G. C. Marques, Phys. Rev. *D9*, 386 (1974).
3. S. Shei, Phys. Rev. *D11*, 164 (1974).
4. R. Chanda, C. Ryan, Nucl. Phys. B40, 573 (1972).
5. C. G. Callan, Phys. Rev. DS, 3202 (1972).
6. S. Coleman, *Dilatations*, 1971 International Summer School of Physics "Ettore Majorana".
7. K. G. Wilson, Phys. Rev. 179, 1499 (1969).
8. R. A. Brandt, G. Preparata, Nucl. Phys. B27, 541 (1971).
9. M. Geil-Mann, F.E. Low, Phys. Rev. 95, 1300 (1954).
10. H. Lehmann, Nuovo Cimento 1, 205 (1955a); K. Symanzik, Nuovo Cimento 2, 425 (1955b); W.Zimmermann, Nuovo Cimento 6, 319 (1957).