Revista Brasileira de **Física,** Vol. 8, N? 2, 1978

U Modelo Cosmológico Newtoniano Não-Isótropo

J. Plínio Batista

Departamento de Fisica e Química*, Centro de Estudos Gerais, Universidade Federal do Espirito Santo, Espírito Santo, ES

Recebido em 21 de Novembro de 1977

A simple newtoniana non rotating cosmological model is proposed using expansion modified functions and Raychaudhuri's equation is obtained. The appication of it to the supercluster of Coma Berenicae shows that the distribution of matter produces a variation of about 280% in the redshift in compare to the isotropicone.

E proposto, neste trabalho, um modelo cosmológico newtoniano não isótropo e não girante mediante o uso das funções de expansão modificadas, obtendo-se como equação de evolução a equação de Raychaudhuri. A sua aplicação ao superagloramerado de Coma Berenicae revela que a distribuição de matéria produz uma variação de aproximadamente 280% no redshift, relativamente à distribuição isotrópica

1. INTRODUÇÃO

As tentativas iniciais visando utilizar a teoria newtoniana da gravitação para a obtençao de modelos cosmológicos se chocaram com a dificuldade de que, dentro de tal teoria, um universo estático seria necessariamente vazio.' Já no final do século passado foram propostas algumas modificações na lei da gravitação newtoniana cujos efeitos somente seriam apreciáveis a grandes distâncias, e por outro lado, mais recentemente, os trabalhos de O. tieckmann e E. Schücking[2,3] conduziram ao estabelecimento teórico mais preciso, dentro deste contexto, das noções de homogeneidade e isotropia, deixando entrever a ampla possibilidade &se elaborar modelos cosmológicos em teoria newtoniana.

* Postal address: Departamento de Física e Química, Centro de Estudos Gerais, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória ES.

De um modo geral a Cosmologia Newtoniana constitui uma aproximação bastante válida das teorias relativísticas, sendo dotada, além do mais, de um enorme poder heurístico (é sabido que uma esfera isolada no interior de um fluido isótropo e homogêneo, onde se possa desprezar a pressão face à densidade própria de energia, tem comportamento compatível com o que prevê a física newtoniana.

Vamos denominar de modelo cosmológico newtoniano a toda solução para as funções ρ, p, ϕ e v^i das equações

$$\partial_t \rho + \partial_i(\rho v^i) = 0 \tag{1}$$

$$\partial_t v^j + v^k \partial_k v^j = - \delta^{ij}\partial_k \phi - \frac{1}{2}\, \delta^{jk}\partial_k p \tag{2}$$

$$\Delta\phi + A = 4\pi G\rho \tag{3}$$

(δ^{ij} é o tensor de Kronecker e ∂ indica a derivada parcial)

onde i, j, k, etc. variam de 1 a 3, A é a constante cosmológica. As componentes covariantes e contravariantes dos vetores ou tensores são, neste caso, iguais, entretanto, usamos a notação acima para facilitar o uso da convenção de Einstein. Admitiremos, além do mais, que as grandezas envolvidas pelas equações acima são invariantes em forma funcional relativamente às transformações entre sistemas co-móveis, ou seja, invariantes frente ao grupo de transformações de Heckmann e Schücking. Esta invariância torna o modelo compatível com o Principio Cosmólogico. Modelos correspondentes aos fornecidos pela Teoria da Relatividade Geral já foram obtidos e estudados dentro da perspectiva newtoniana: Einstein-De Sitter, Lemaître, Gödel, etc.

No que segue apresentaremos um modelo newtoniano não-isótropo mediante o uso apropriado das funções de expansão, obtendo-se uma expressão para o potencial e equações de evolução compatíveis com o que fornece a Relatividade Geral. Uma estimativa numérica para a variação do redshift fornecida pelo modelo parece se adaptar "grosso modo" aos levantamentos recentemente efetuados em torno do superaglomerado de Coma Berenicae.

2. EQUAÇÕES DE CAMPO E DE EVOLUÇÃO

O *substratum* cosmológico é representado inicialmente como um fluido perfeito. Seja $v_i(x^j,t)$ a velocidade de um ponto qualquer deste fluido; o Princípio Cosmológico permite dar a esta velocidade a expressão,

$$v_i(x^j,t) = a_{ij}(t)x^j \tag{4}$$

onde a_{ij} são as componentes de um tensor de segunda ordem a serem determinadas.

As equações do movimento (1) e (2) são as equações clássicas da fluidodinâmica e podem ser escritas envolvendo grandezas cinemáticas mais acessíveis à observação: expansão, distorção e rotação. Desmembrando a_{ij} em suas partes simétrica e antissimétrica e tendo em conta as definições usuais dos tensores de expansão e de rotação, temos

$$v_i(x^j,t) = (\Theta_{ij} + \omega_{ij})x^j$$

Por outro lado o tensor de expansão pode ainda ser desmembrado como,

$$\Theta_{ij} = \sigma_{ij} + \frac{1}{3}\Theta\delta_{ij} \tag{5}$$

onde $\Theta = \delta^{ij}\Theta_{ij}$ é o traço do tensor de expansão e σ_{ij} é o tensor de distorção e representa deformação a volume constante, sendo dotado portanto de traço nulo,

$$\delta^{ij}\sigma_{ij} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \tag{6}$$

Finalmente, a velocidade de um ponto arbitrário do fluido cosmológico se escreve,

$$v_i = (\sigma_{ij} + \frac{1}{3}\Theta\delta_{ij} + \omega_{ij})x^j \tag{7}$$

Todavia, vamos considerar neste trabalho apenas modelos a rotação nula. Por outro lado o caráter tensorial das equações nos permite escolher em cada referencial co-móvel um sistema de coordenadas que melhor se adapte à análise do modelo proposto. É claro que as coordenadas co-móveis são naturamente adotadas como consequência da invariância imposta mais acima; adicionalmente vamos usar o sistema co-móvel cujos eixos sejam colineares às direções principais da expansão. Assim sendo, suponhamos que $x^j_{(k)}$ sejam as componentes de três auto-vetores da distorsão, então,

$$\sigma_{ij}x^j_{(k)} = \sigma_{(k)}\delta_{ij}x^j_{(k)}$$

onde $a_{(k)}$ são os auto-valores correspondentes. É imediato que $x^j_{(k)}$ constitui também um conjunto de auto-vetores da expansão,

$$\Theta_{ij}x^j_{(k)} = (\frac{1}{3}\Theta + \sigma_{(k)})\delta_{ij}x^j_{(k)}$$

onde $\frac{1}{3}\Theta + \sigma_{(k)}$ são os respectivos auto-valores. Por outro lado (6) implica que,

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0 \tag{8}$$

Vamos definir em seguida as funções de expansão[4] modificadas $A_i(t)$

$$A_i(t) = R(t)e^{\Omega_i} \tag{9}$$

onde Ω_i são tais que: $\dot{\Omega}_i = o_i$ e $R(t)$ é o fator de escala ou raio de universo. De (9), tomando igual a zero a constante de integração da definição de Ω_i:

$$A_1(t)A_2(t)A_3(t) = R^3(t) \tag{10}$$

e ainda,

$$\frac{\dot{A}_1(t)}{A_1(t)} + \frac{\dot{A}_2(t)}{A_2(t)} + \frac{\dot{A}_3(t)}{A_3(t)} = 3\,\frac{\dot{R}(t)}{R(t)} = \Theta \tag{11}$$

onde 0, traço do tensor de expansão, é o escalar de expansão.

A definição (9) permite escrever

$$v_i = \frac{\dot{A}_i(t)}{A_i(t)} x_i \qquad \text{(sem soma nos índices } i) \tag{12}$$

o que fornece por meio de integração imediata,

$$x^j = A_j(t) x^j_0 \qquad \text{(sem soma nos índices } j) \tag{13}$$

onde os x^j são as coordenadas co-móveis de um ponto qualquer do fluido cosmológico. Usando as coordenadas co-móveis e admitindo composição de velocidade galileana, a troca de impulsos luminosos entre dois observadores co-móveis e alinhados segundo a direção n^i, permite comparar os períodos de emissão e recepção respectivamente Δt_1 e Δt_2:

$$\frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} = \frac{A_i(t_2)}{A_i(t_1)} \tag{14}$$

Esta relação fornece uma expressão para o redshift direcional,

$$z_i = \frac{A_i(t_2)}{A_i(t_1)} - 1 \tag{15}$$

Desta fórmula obtemos uma expressão aproximada para o redshift direcional por unidade de distância,

$$\bar{z}_i \sim \frac{\dot{A}_i(t)}{A_i(t)} = \frac{1}{3}\Theta + \sigma_i \tag{16}$$

Finalmente, levando (12) em (1), tendo em mente o referencial adotado e ainda mediante o uso de (10) e (11), obtemos a expressão para o potencial e as equações que descrevem a evolução do modelo,

$$\rho R^3(t) = \text{constante} \tag{17}$$

$$\phi = -\frac{1}{2}\left(\frac{\ddot{A}_1}{A_1} x_1^2 + \frac{\ddot{A}_2}{A_2} x_2^2 + \frac{\ddot{A}_3}{A_3} x_3^2\right) \tag{18}$$

$$- 3 \frac{\ddot{R}}{R} - (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) + \Lambda = 4\pi G\rho \qquad (19)$$

onde (18) e (19) são obtidas de (2) e (3).

Consideremos, por outro lado, a aceleração total atuante sobre uma partícula qualquer, $a_i = \dot{v}_i + \partial_i \phi$, onde

$$\dot{v}_i = \partial_t v_i + v^j \partial_j v_i$$

Calculando $\partial_i a_j$ [5] temos,

$$(\partial_i v_j)^{\bullet} + \partial_i v^k \partial_k v_j + \partial_{ij} \phi - \partial_i a_j = 0$$

Desmembrando os termos em que aparecem derivadas parciais da velocidade em suas partes simétrica e antissimétrica, multiplicando o resultado por δ^{ij} e tendo em conta as definições já mencionadas da expansão, distorsão e rotação,

$$\dot{\Theta} + \frac{1}{3} \Theta^2 + 2(\sigma^2 - \omega^2) - \Lambda + 4\pi G\rho = 0 \qquad (20)$$

onde $\sigma^2 = \frac{1}{2} \sigma^{ij}\sigma_{ij}$ $\omega^2 = \frac{1}{2} \omega^{ij}\omega_{ij}$. A equação (20) assim obtida é a conhecida equação de Raychaudhuri.

Desta forma, a equação obtida mais acima (19) é a equação de Raychaudhuri escrita no sistema de coordenadas adotado.

3. APLICAÇÃO AO CÁLCULO DA VARIAÇÃO DO REDSHIFT

A fórmula para o redshift direcional por unidade de distância (16) aliada à equação (19) permite uma aplicação imediata no que concerne à distribuição de galáxias recentemente levantada[6] no superaglomerado de Coma Berenicae. Neste levantamento percebe-se a concentração das galáxias (segundo seus redshifts) segundo dois eixos preferenciais. Admitindo-se que isto se deva à expansão anisotrópica, vamos associar a direção principal correspondente a a_1 ao eixo preferencial maior, com $\sigma_1 > 0$. Para um observador (co-móvel) situado neste eixo o redshift por unidade de distância pode ser escrito,

$$\bar{z} = \bar{z}_0 + \lambda\bar{z}_0 \qquad (21)$$

onde λ é um parâmetro que depende de $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ e $\bar{z}_0$ é o redshift isótropo. A comparação de (21) com (16), para $i = 1$, resulta,

$$\lambda = \frac{\sigma_1}{\bar{z}_0} = \frac{3\sigma_1}{\Theta} \quad (\bar{z}_0 = \frac{1}{3}\Theta) \qquad (22)$$

Por outro lado, a nulidade do traço da distorsão admite a solução

$$\sigma_2 = \sigma_3 = \alpha\Theta \qquad \text{com } \alpha < 0, \text{ constante} \qquad (23)$$

Substituindo σ_1 em função de σ_2 e σ_3 na equação (19) e com o auxílio de (23), fazendo $\Lambda = 0$, temos

$$\alpha = -\left(-\frac{\ddot{R}R}{18\dot{R}^2} - \frac{2\pi G\rho R^2}{27\dot{R}^2}\right)^{1/2} \qquad (24)$$

Tomando a equação (24) no instante $t = t_0$ e tendo em conta os valores $\rho_0 \simeq 3.10^{-28}\text{kg.m}^{-3}$; $H_0 \simeq 5.10^{-18}\text{s}^{-1}$ e $G \simeq 6{,}6.10^{-11}\text{kg}^{-1}\text{m}^3\,\text{s}^{-2}$, o segundo termo do segundo membro sendo inexpressivo diante do primeiro, temos,

$$\alpha \simeq -\left(\frac{q_0}{18}\right)^{1/2} \quad \text{ou} \quad \alpha \simeq -0{,}24 \text{ para } q_0 \simeq 1 \qquad (25)$$

onde fizemos,

$$q_0 = -\frac{\ddot{R}(t_0)R(t_0)}{\dot{R}(t_0)}$$

é o fator de desaceleração. Enfim a nos fornece o valor $\lambda = 1{,}44$. Por outro lado se o observador ao qual está associada a fórmula (21) realizar duas observações diametralmente opostas, ou seja uma na direção do centro do superaglomerado e outra no sentido oposto, podemos calcular,

$$\delta\lambda = \lambda - \lambda^* = 2,88 \qquad (\lambda^* = -\frac{3\sigma}{\Theta}\,^{1})$$

4. CONCLUSAO

Mostramos que a analogia entre a Cosmologia Relativística e a Newtoniana é estendida aos modelos não-isotrópicos e através do uso de funções de expansão modificadas obtemos com muita simplicidade um modelo não isótropo e não girante (um estudo de modelo semelhante já foi feito rigorosamente dentro do contexto da Relatividade Geral[7] mediante o uso do formalismo das tetradas e onde se extrai soluções análogas às apresentadas aqui).

Este trabalho é ainda uma consequência dos assuntos debatidos por ocasião da passagem do Dr. S. Kichenassamy pela Universidade Federal do Espírito Santo. Ao Prof. Kichenassamy dirijo meus agradecimentos.

REFERÊNCIAS

1. S. Mavridès, *L'Universe Relativiste*, Masson & Cie. (1973).
2. O. Heckmann & E. Schücking, *Handbuch der Physik*, (1959).
3. R.K. Sachs & J. Ehlers, *Brandeis Summer Institute*, volume 2, 1968.
4. K. Jacob, The AjP, 153, 661 (1968).
5. S. Kichenassamy, Departamento de Física e Química, Vitória, *Curso de Cosmologia*, (julho de 1976).
6. Tift, W.G., and Gregory, S.A., The AjP, 205, 696, maio de 1976.
7. J. Plínio Baptista, a ser publicado.