

## H<sub>6</sub> – ESQUEMAS AUXILIARES PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

MARTINS, Roberto de Andrade – Departamento de Física – Universidade de Londrina – PR

Na elaboração do curso de Física, da Universidade Estadual de Londrina, foi desenvolvido um recurso capaz de auxiliar o processo de resolução de problemas físicos complexos (de tipo que envolva interconexão de muitas idéias independentes). Trata-se de esquemas em árvore que indicam de forma gráfica a interrelação entre a situação proposta e o resultado a que se deseja chegar; e que permite a construção gradativa das ligações entre eles. Esses esquemas auxiliares levam a pessoa que os utiliza a separar toda resolução de problemas complexos em duas fases: planejamento e execução. Isso evita quase completamente a costeira perda de tempo com tentativas desordenadas. Há procedimentos sistemáticos para construção de "árvores" de resolução; e, após sua obtenção, a execução de cálculos ou deduções de equações torna-se praticamente automática.

Os esquemas de resolução, chamando a atenção para o processo lógico envolvido na resolução dos problemas, mostram muitos tipos de dificuldades que são sentidas normalmente pelos estudantes e que não são facilmente analisadas de outra forma. Observou-se a importância prática, para o professor, da utilização desses esquemas em árvore: a análise detalhada do processo de resolução, permitida por eles, indica ao professor tudo o que este está pressupondo que o aluno é capaz de fazer ao realizar o problema; e pode mostrar exatamente onde se situa o defeito do processo de ensino, quando os alunos falham ao resolver um determinado tipo de problemas.

Algum tempo atrás, criticava-se muito a teoria *das capacidades* ou teoria das faculdades, segundo a qual cada indivíduo pode desenvolver certas capacidades que podiam ser posteriormente aplicadas (transferidas) a qualquer assunto. Por exemplo: uma pessoa que se dedicasse a decorar poesias aumentaria sua capacidade de decorar qualquer assunto. Experiências clássicas de Therndike e Woodworth, em 1901, pareciam ter desmentido essa concepção, mas suas experiências foram extremamente limitadas, e outros pesquisadores (por exemplo, Sleight, 1911) verificaram a existência de efeitos previstos pela teoria. Admite-se no entanto **que** a transferência não se dá espontaneamente, e que a conscientização das técnicas utilizadas é muito importante no processo de transferência de métodos de trabalho. Se, por exemplo, um grupo de pessoas dedica-se a decorar poesias e depois lhes é fornecida uma lista de sílabas desconexas que devem decorar, os melhores resultados serão obtidos se as pessoas primeiramente conscientizarem as técnicas utilizadas ao decorar poesias, depois tentarem aplicá-las às sílabas.

Se existir uma capacidade de resolver problemas, ou, o que dá na mesma, se há técnicas de resolução de problemas de aplicação geral, pode-se supor que seu desenvolvimento não se dará simplesmente pelo exercício de resolução de problemas, e que haverá grande vantagem em conscientizar os mecanismos empregados na resolução de problemas, a fim de aplicá-los a situações novas.

Em grande parte, o presente trabalho procurará apresentar juntamente um método que levou à conscientização de processos comumente utilizados na resolução de problemas. Há certas atividades que aumentam grandemente a probabilidade de resolução de problemas complexos, e que podem ser explicadas, conscientizadas e aplicadas facilmente com o auxílio dos esquemas de resolução de problemas, desenvolvidos durante a elaboração do curso de Física Básica na Universidade Estadual de Londrina, em 1975.

Uma das primeiras tentativas realmente práticas de desenvolvimento de um método sistemático de resolução de

problemas foi devida a G. Polya. Seu objetivo era criar uma técnica que auxiliasse alunos de nível secundário a resolver problemas matemáticos indiretos. No entanto, as técnicas desenvolvidas por ele prestam-se igualmente bem a uma classe muito ampla de problemas.

O método de Polya não era uma seqüência rígida de atividades que tivesse por fim obter a resposta a um problema. Dividia o trabalho em quatro grandes partes (compreensão do problema, elaboração de um plano de resolução, execução do plano, revisão), mas admitia que o indivíduo poderia começar imediatamente a execução da resolução do problema, se soubesse resolvê-lo. A seqüência só precisaria ser realmente utilizada quando o problema fosse problemático - isto é, quando não se soubesse como resolvê-lo.

Dentro de cada uma dessas grandes unidades da resolução de um problema, a técnica utilizada por Polya consistia em utilizar uma série de perguntas-chave, cujas respostas podiam favorecer o esclarecimento do problema e a obtenção de uma solução. Eram perguntas tais como: "Qual é a incôgnita?" "Você já viu um problema semelhante?", etc. Essas perguntas deveriam ser memorizadas pelos alunos, através de um uso contínuo, até que seu surgimento se tornasse automático, quando o aluno estivesse frente a um problema; e o surgimento da pergunta poderia favorecer a obtenção de uma solução. O sistema utilizado por Polya parece-nos muito bom e em grande parte seguiremos suas idéias gerais, que podem ser encontradas no livro "How to solve it".

O ensino do método de Polya se baseava em atividade dinâmica em classe, dirigida pelo professor: ele propunha um problema e ia fazendo as perguntas-chave à classe, numa seqüência adequada (nem sempre se utilizava todas as perguntas) e ia conduzindo os alunos a compreender e resolver o problema. Após a obtenção da resposta, examinava-se o problema novamente, à procura de falhas, e verificando-se se a resposta era plausível. Polya esperava que o procedimento se fixasse e se tornasse autônomo, após um certo tempo, e diz ter verificado bons resultados. É altamente plausível

que o sistema funcione.

Ao desenvolver o curso de Física Básica, pareceu-nos interessante aplicar a técnica de Polya. Porém, desejávamos utilizar material didático auto-instrutivo, o que exigia uma profunda reestruturação do método; e começamos a verificar algumas dificuldades do método, que limitavam bastante seu valor prático. A fim de compreender-se melhor essas dificuldades, fornecemos abaixo um resumo da técnica de Polya:

#### *Compreensão do problema*

Você tem que entender o problema:

Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condição ?

É possível satisfazer à condição?

A condição é suficiente para determinar a incógnita?.

Ou é insuficiente? Ou redundante? Ou contraditória?

Desenhe uma figura. introduza notação conveniente .

Separe as várias partes da condição. Você pôde escrevê-las?

#### *Elaboração de um plano*

Encontre a conexão entre os dados e a incógnita.

Você pode ser obrigado a considerar uma conexão imediata.

Você deveria obter eventualmente um plano da solução.

Você viu o problema antes? Ou viu o mesmo problema numa forma ligeiramente diferente?

Você conhece algum problema relacionado? Conhece uma lei (teorema) que poderia ser útil?

Olhe para a incógnita; e tente pensar num problema familiar que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante.

A partir do problema A relacionado a este, o que se poderia fazer? Você poderia utilizá-lo? Poderia usar seu resultado ou método? Poderia modificá-lo de modo a tornar possível seu uso? Você poderia reformular o seu problema? Poderia expressá-lo de modo diferente?

Volte às definições.

Se você não pode resolver o problema, tente resolver algum problema relacionado, Poderia imaginar um problema relacionado mais acessível.

Um problema mais geral? Um problema mais especial? Poderia resolver uma parte do problema?

Poderia determinar alguma coisa Útil a partir dos dados\*?

Poderia pensar em outros dados apropriados para determinar a incógnita?

Usou todos os dados? Usou a condição inteira?

Levou em conta todas as noções necessárias envolvidas no problema?

### *Execução do plano*

Execute seu plano.

Executando seu plano de resolução, teste cada passo. Pode ver claramente que o passo está correto? Pode provar que ele é correto?

### *Revisão*

Examine a solução obtida.

Pode testar o resultado? Pode testar o raciocínio? Pode obter o resultado de um modo diferente? Pode vê-lo num relanço?

Pode usar o resultado, ou o método, para algum outro problema?

Não é difícil, mas é extremamente cansativo e aborrecido ensinar todos esses passos; e o tempo necessário para fixar-se a utilização de todas essas frases-chave (e outras mais omitidas nesse resumo) seria enorme. Era preciso estruturar um método mais prático.

Além disso, mesmo que o aluno fosse capaz de aprender todas essas frases, é difícil manter uma concatenação de idéias suficiente para atingir a solução: pode ser que ele formule a si mesmo as perguntas, saiba responde-las, mas não consiga resolver o problema.

Se fosse possível ir registrando as respostas a todas as perguntas, de modo tal que o aluno pudesse rever tudo o que havia feito, rapidamente, o método seria mais valioso. Mas os alunos não se prestam a tal tipo de trabalho, por ser excessivamente trabalhoso, como verificamos em experi-

ências realizadas anteriormente.

O método de Polya é essencialmente verbal, e depende, na prática, durante muito tempo, da existência de um orientador. Assemelha-se ao método socrático de perguntas; uma pessoa arguida por Sócrates durante anos poderia acabar tornando-se um bom filósofo, mas não se obteria tal resultado rapidamente. Da mesma forma, sem o auxílio do professor, os alunos dificilmente serão capazes de selecionar quais são as perguntas ou atividades importantes, e podem perder-se no processo. O aluno pode mesmo esquecer-se do plano que havia formulado, se o problema for complexo.

Um problema didático trazido pelo método é a dificuldade em verificar-se se os alunos o estão utilizando ou não; e, portanto, a dificuldade em avaliá-lo e corrigí-lo. Somente se o processo fosse totalmente registrado seria possível analisar as dificuldades e falhas. E, como já foi assinalado, o registro sob forma verbal é inviável por sua extensão. Era interessante, por isso, obter alguma técnica de externalização não-verbal das atividades envolvidas na resolução de problemas, pois só essas podem ser facilmente utilizadas, ensinadas e avaliadas.

Por outro lado, a ordem que as técnicas deveriam ser ensinadas não deve ser a ordem do sistema de Polya; aqui, por tratar-se de atividade altamente complexa, de tipo semi-sequencial, é indicado partir-se do fim; ou seja: ensinar-se primeiramente a executar um dado plano de resolução do problema; depois ensinar-se a elaborar o plano; em terceiro lugar ensinar-se a analisar o problema; e em quarto lugar ensinar a rever os problemas (pois isso é um apêndice ao processo). Experiências anteriores mostraram que os alunos não se interessam pelas técnicas de análise de problemas se não sabem para que *isso vai servir*, e que não acham útil a realização de um plano de resolução de problema se não souberem previamente como ele será utilizado. Normalmente, o aluno está ansioso para obter a resposta final e deve-se aproveitar de modo construtivo essa ansiedade, que comumen-

te se traduz pela tendência imediata de fazer cálculos e obter resultados parciais.

Antes de explicar a técnica desenvolvida, é preciso especificar o tipo de problemas que se desejava estudar.

Um problema é qualquer situação em que se deseja obter um resultado, mas não se conhece os meios necessários. A situação "desejo ficar rico" é um problema para muitas pessoas que desejam obter esse resultado (ficar rico) mas não sabem como fazê-lo. A situação "as novas partículas descobertas contrariam a teoria dos quarks" não é um problema, pois não se especifica objetivo algum (poderia ser um problema se fosse expressa assim: "desejo modificar a teoria dos quarks de tal modo que ela explique as novas partículas descobertas", e se não se conhecer o modo de fazer isso).

Embora, até certo ponto, as técnicas de Polya e as desenvolvidas por nós no curso de Física Básica possam se aplicar até mesmo a esses problemas, nosso objetivo realera simplesmente desenvolver um método que facilitasse a resolução de problemas de física do tipo utilizado no ciclo básico das universidades: problemas que podem ser solucionados com a utilização dos conhecimentos de que os indivíduos já disponham (ou seja: problemas que não exijam que o aluno estude novos assuntos ou adquira novas informações); de baixa complexidade matemática, e em que a dificuldade principal seja associar entre si um grande número de informações estudadas sob forma desconexa (várias leis, princípios, etc). Há problemas em que a principal dificuldade, pelo contrário, é uma mudança do ponto de vista do indivíduo, como um célebre problema utilizado por Polya: "Um urso caminha dez quilômetros para o sul, dez quilômetros para oeste, dez quilômetros para o norte, e volta assim ao ponto de partida. Qual é a cor do urso?" A solução do problema exige a utilização de uma mudança de ponto de vista: de uma geografia plana a uma geometria esférica. Pelo contrário, um problema como: Uma pessoa caminha 5 metros a partir de um certo ponto inicial horizontalmente; depois, sobe 4 metros em uma escada vertical; caminha mais 2 metros horizontalmente; na mesma dire-

ção inicial, e desce outra escada vertical de 2 metros; a que distância ela se encontra do ponto de partida?" - exige apenas a associação de várias operações simples para sua solução.

Para resolver-se problemas desse tipo, as condições necessárias são:

- 1 - conhecer as leis físicas necessárias
- 2 - conhecer as técnicas e princípios matemáticos necessários
- 3 - saber aplicar as técnicas matemáticas às leis físicas.
- 4 - conhecer técnicas de resolução de problemas ( técnicas heurísticas).

No curso de Física Básica, as técnicas de resolução e revisão de problemas complexos eram apresentados na 6a. e na 7a. etapas. Anteriormente, os estudantes haviam aprendido a estudar textos qualitativos (1a.etapa), utilizar gráficas (2a.etapa), utilizar leis quantitativas em problemas simples, aplicando as técnicas matemáticas adequadas (3a.etapa) e nas outras duas etapas anteriores (4a.e 5a.), além de aprender a estudar textos quantitativos, haviam praticado a resolução de deduções e resoluções de problemas simples (que utilizassem apenas uma ou duas leis). Portanto, na 6a. e 7a. etapas bastava desenvolver as técnicas heurísticas de resolução e revisão de problemas. Além disso, desenvolvia-se um pouco mais as técnicas de estudo autônomo das etapas anteriores.

Como já foi citado, o ensino de técnicas de resolução de problemas iniciava-se pelo desenvolvimento da capacidade de utilizar um plano de resolução de um problema.

Consideremos o seguinte problema:

"Um pequeno objeto radioativo, que emite radiações beta, está inicialmente em um estado eletricamente neutro. Após 15 minutos, ele adquiriu uma carga elétrica positiva de  $4,4 \times 10^{-13}$  coulomb. Supondo-se que toda carga elétrica adquirida pelo objeto foi mantida nele, e que está no vácuo, determine a intensidade de radiação beta a 18 cm do objeto

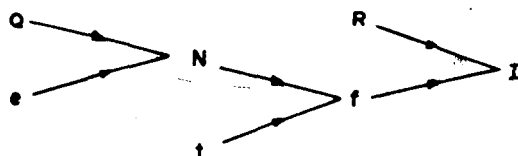
O plano de resolução desse problema pode ser assim



explicado, verbalmente (de acordo com os conhecimentos que os alunos de Física Básica possuíam):

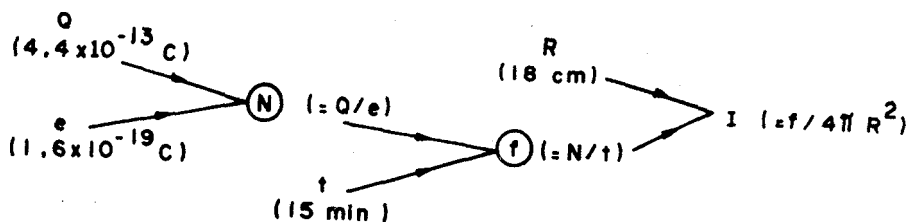
Calcula-se primeiramente o numero de partículas beta emitidas nos 15 minutos, através da carga total adquirida pelo corpo radioativo e utilizando-se o valor da carga do elétron,  $e$ . Depois, utilizando-se o tempo (15 min), calcula-se o fluxo de partículas que saem da amostra; e, conhecendo-se o fluxo total emitido e a distância (18 cm), calcula-se a intensidade de radiação a essa distância.

A partir de uma descrição como essa, comumente os alunos serão capazes de resolver o problema, pois ele foi decomposto em uma série de problemas de aplicação direta de fórmula. Mas uma descrição desse tipo, verbal, não é muito prática; era interessante desenvolver um meio de registro do plano de trabalho que permitisse uma fácil elaboração e decodificação. Isso foi conseguido com as "árvores"- nome dado pelos alunos aos "esquemas auxiliares de resolução de problemas" utilizados em Física Básica. O plano acima, por exemplo, pode ser assim representado:



Nesses esquemas, a extremidade da direita é a incógnita, o resultado que se deseja obter; e as extremidades da esquerda são os dados do problema. As setas indicam quais as grandezas que devem ser associadas para calcular-se a incógnita final ou as grandezas intermediárias (incógnitas auxiliares do problema).

Um esquema em árvore indica, além disso, os valores dos dados (e constantes, como  $e$ ) e as equações que devem ser utilizadas para calcular-se cada incógnita:



Esse problema possuía duas incógnitas auxiliares, e utilizava três equações conhecidas pelos alunos. A partir desse esquema, calcula-se progressivamente os valores das incógnitas, ou deduz-se a equação que relaciona a incógnita aos dados e constantes.

Como os alunos já tinham estudado as técnicas matemáticas e as leis físicas necessárias e sabiam aplicar as técnicas matemáticas à física, não tiveram dificuldade em aprender a utilizar os esquemas em árvore prontos; dada a árvore de resolução completa do problema, é possível, mesmo sem se conhecer o enunciado do problema, calcular-se o valor da incógnita ou deduzir-se a equação que relaciona a incógnita aos dados e constantes, por mais complexo que seja o problema. Após aprendida essa técnica, qualquer falha decorrerá apenas de enganos primários. Isso ilustra bem a idéia expressa por Poincaré em "La science et la méthode", de que a dificuldade essencial em problemas e demonstrações matemáticas, o difícil não era compreender cada passo, isoladamente, mas associar as idéias umas às outras, de modo a chegar ao resultado. Lembra-nos também o "método" de Descartes, especialmente o segundo e o terceiro princípios.:

"A segunda, de dividir cada uma das dificuldades que eu examinasse em tantas partes quantas possíveis, e quantas necessárias fossem para melhor resolvê-las; a terceira, de dirigir ordenadamente meus pensamentos, começando pelos objetos mais simples e mais fáceis de conhecer, para subir, pouco a pouco, como por degraus, até o conhecimento dos mais compostos. ." ("Discurso do Método")

Observe-se que esses esquemas são de fácil utiliza-

ção e construção, permitem uma visualização das relações entre as grandezas sob uma forma espacial (ao invés de linear, como numa descrição verbal), e contêm mais informações do que a descrição verbal da página anterior. Alunos comuns facilmente desanimariam se tivessem que utilizar e principalmente - construir planos de resolução de problemas sob forma verbal; mas utilizam com entusiasmo os esquemas de resolução em árvore.

Após utilizar árvores completas, os alunos passavam a receber esquemas incompletos (sem a indicação dos valores dos dados constantes, ou sem as equações, ou uma lista de equações sem o esquema em árvore), a fim de que completassem o esquema e o utilizassem; e chegava-se depois a um estágio em que só recebiam o enunciado do problema, e era preciso construir o esquema de resolução completo.

O mais importante dos métodos para construção da árvore consistia em partir da incógnita e procurar quais as leis que permitem calculá-la, e quais as grandezas que devem ser conhecidas para aplicar-se a lei; algumas dessas grandezas eram conhecidas (dados ou constantes); outras tornavam-se grandezas incógnitas auxiliares, e a atenção se voltava então para elas: como poderiam ser calculadas?

Como normalmente cada grandeza aparecia em mais de uma lei estudada em Física Básica, podia ocorrer que o indivíduo utilizasse alguma que se adequava às condições do problema, ou que não permitisse avançar além de um certo ponto. Deveria então voltar atrás e recomeçar da incógnita, ou utilizar outra técnica de construção de árvores.

A segunda técnica de elaboração dos esquemas auxiliares tomava como ponto de partida os dados: o que se pode calcular com os dados fornecidos no problema? Para que podem servir os dados? Quais as leis ou equações em que aparecem grandezas correspondentes a esses dados do problema? A partir de uma análise como essa, podia-se obter relações que facilitassem a visualização de uma relação entre dados e incógnita e que permitisse a escolha do caminho correto de planificação do problema. Para exercitar esse tipo de

atividades, fornecia-se aos alunos *problemas* abertos: descrições de situações, semelhantes ao enunciado de um problema, mas sem especificação de uma incógnita; o aluno deveria indicar por meio de um esquema em árvore tudo o que pudesse ser calculado a partir dos dados e condições do enunciado.

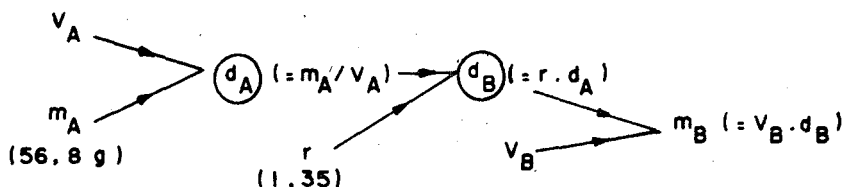
Quando se parte da incógnita, procurando-se voltar até os dados, vão progressivamente surgindo séries de grandezas necessárias para calcular a incógnita final ou incógnitas auxiliares. Cada uma dessas grandezas enquadra-se necessariamente em uma das seguintes categorias:

- é um dado fornecido no enunciado do problema;
- é uma constante universal;
- pode ser obtida de uma tabela ou gráfico conhecido;
- pode ser calculada (incógnita auxiliar);
- é uma grandeza arbitrária (seu valor não influi no resultado do problema);
- é uma grandeza que nem pode ser calculada (no caso) nem é arbitrária.

O penúltimo caso corresponde a situações do seguinte tipo:

"Os objetos A e B possuem igual volume; a massa de A é igual a 56,8g; a densidade de B é 1,35 vezes a densidade de A. Qual é a massa de B?"

Esse problema pode obviamente ser resolvido sem conhecer-se o volume dos objetos; mas um aluno poderia montar o seguinte raciocínio:



Difícilmente conseguiria resolver o problema, então, pois não saberia como determinar os valores dos objetos. Mas o

volume, nesse caso, é totalmente arbitrário; pode-se supor que os objetos possuem um volume de  $10 \text{ cm}^3$  ou  $20 \text{ cm}^3$  - em qualquer caso, a resposta final será a mesma, desde que se obedeça à condição  $V_A = V_B$ . Nesse problema, essa grandeza (volume dos objetos) é uma grandeza arbitrária.

No caso em que a grandeza não seja arbitrária nem possa ser calculada, o problema está seguindo um raciocínio errado, e é preciso voltar atrás e tentar utilizar outra lei que permita calcular a incógnita final ou incógnitas auxiliares.

Se uma grandeza é arbitrária, ela aparecerá pelo menos duas vezes no esquema de resolução do problema. Inversamente, sempre que uma incógnita auxiliar que está atrapalhando a resolução de um problema aparece duas ou mais vezes, é provável que seu valor seja arbitrário. Ensinava-se os alunos a verificar a arbitrariedade de uma dada grandeza, no problema, por um dos dois processos abaixo:

- 1) substituir dois valores arbitrários, bem diferentes, no lugar da grandeza, e calcular-se o valor da incógnita final, a fim de verificar se seu valor era sempre o mesmo;
- 2) deduzir a equação que relaciona a incógnita às extremidades da árvore (mesmo que o esquema estivesse incompleto), e verificar se a grandeza suspeita aparece na equação final.

No esquema completo, as extremidades da árvore (excetuando-se a incógnita final) são os dados numéricos do enunciado; constantes universais; valores obtidos de tabelas; ou incógnitas arbitrárias. Os valores obtidos de tabelas são escolhidos, normalmente, tendo-se em vista alguma das condições do enunciado - por exemplo: pode ser necessário utilizar uma meia-vida de um certo elemento, na resolução do problema; o enunciado talvez indique qual é o isótopo, mas sem dizer qual é a meia-vida que precisará ser obtida numa tabela contida nos textos estudados.

Os entroncamentos ou forquilhas da árvore de resolu-

ção envolvem operações com grandezas: determinar-se o valor de uma grandeza A, sendo conhecidos os valores das grandezas B, C, D... Para determinar-se esse valor de A pode ser necessário utilizar uma lei física, substituindo-se simplesmente os valores das outras grandezas na fórmula; ou podem ser necessárias complexas manipulações matemáticas ou mesmo utilização de métodos gráficos e aproximativos. No curso de Física Básica os entroncamentos eram ou leis já conhecidas ou fórmulas que podiam ser deduzidas diretamente das leis estudadas.

Em muitos problemas, no entanto, os entroncamentos apresentam uma característica estranha: não exigem nada de complicado, apenas uma regra-de-três, ou algo semelhante. E isso é o que, para os alunos, dificulta tudo - pois esse entroncamento pode ser algo que não foi ensinado e que o professor acha que os alunos têm a obrigação de conhecer, por tratar-se de mero bom-senso. Na verdade, esse bom senso pode incluir raciocínios geométricos espaciais, argumentos de simetria e aplicação de princípios de superposição nem sempre intuitivos e que realmente precisariam ter sido ensinados. É o caso, por exemplo, do professor que ensina a resolver problemas sobre dinâmica de sólidos com um só corpo e depois exige que os alunos saibam resolver um problema em que há vários corpos interligados por cordões.

Podia ocorrer que o aluno não conseguisse elaborar o esquema auxiliar de um dado problema, mesmo utilizando as técnicas ensinadas. Nesse caso, podiam ter ocorrido dois tipos de problema: não conhecer bem o assunto, ou não ter compreendido o problema. Como todos os trabalhos de Física Básica eram realizados com consulta livre, o indivíduo que não estivesse seguro de seus conhecimentos poderia consultar a parte pertinente dos textos, ou consultar seu resumo. Como, no entanto, os alunos tinham sido levados a estudar adequadamente todos os textos utilizados no curso de Física Básica, o mais comum era que eles não tivessem compreendido perfeitamente o significado do enunciado do problema. Observa-se muitas vezes que, com uma simples explicação verbal,

com novos termos, daquilo que se conhece e se deseja atingir, os alunos são capazes de resolver o problema. Mas desejava-se que a atividade de resolução de problemas fosse individual; daí a necessidade de que os próprios alunos soubessem analisar o enunciado, para uma compreensão profunda do mesmo.

A **análise** de enunciado do problema foi dividida, no nosso curso, em três atividades:

- fazer uma lista de dados
- executar um diagrama da situação descrita
- analisar condições não-numéricas do problema

Se o problema era numérico, a lista de dados **incluía** os valores, símbolos e descrição de todas as grandezas fornecidas no enunciado. Especificava-se na lista o significado exato de cada grandeza: não **só** algo como "massa", mas "massa de urânio 238 contida na amostra". Iniciava-se na lista, também, a incógnita do problema.

O diagrama da situação era um desenho **esquemático** de todos os objetos, **aparelhos**, entes **físicos** invisíveis e grandezas que pudessem ser espacialmente localizados. Indicava-se no diagrama os valores e símbolos das grandezas **localizáveis**.

As **condições** não-numéricas do problema (**exemplo: a radiação é do tipo alfa; a radiação está atravessando um recipiente com gás carbônico; etc**) deveriam ser grifadas no enunciado e o aluno deveria verificar se elas poderiam ser eliminadas ou não do enunciado; se não pudessem como poderiam ser utilizadas (**às vezes, a condição serve para escolher-se uma constante em uma tabela; outras vezes, para escolher-se uma dentre várias equações ou leis, etc**).

Se, **após** essa análise do enunciado, o aluno ainda **não** fosse capaz de construir o plano de resolução, era-lhe sugerido que estudasse novamente os textos, pois deveria localizar-se **aí** a 'falha'.

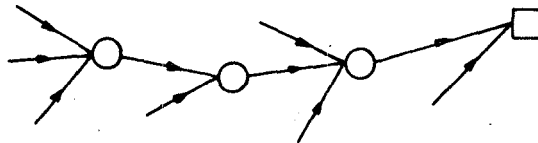
Após a resolução do problema, a fase final consistia na análise dos possíveis erros ocorridos durante a resolução. Era esse o ponto central da sétima etapa de Física Básica. A

análise de erros não só permitia eliminar falhas após a resolução do problema como também acabava por fixar a atenção dos alunos sobre os principais erros cometidos, e os levava a evitar esses erros.

Como a análise de erros não está diretamente relacionada aos esquemas auxiliares em árvore, que é o assunto principal da presente comunicação, ela não será aqui descrita detalhadamente. Pode ser estudada no próprio material didático de Física Básica.

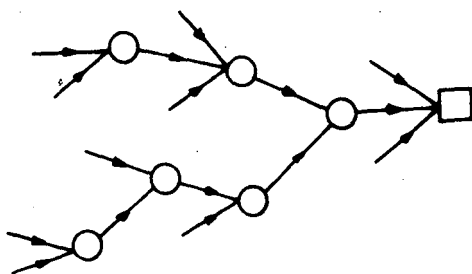
Observou-se, durante o segundo semestre de 1975, na Universidade Estadual de Londrina, que os estudantes realmente aprenderam e acostumaram-se a utilizar esquemas em árvore para resolução de problemas. Os esquemas eram sentidos como imprescindíveis na resolução de questões complexas (com mais de cinco "entroncamentos", ou seja, mais de cinco equações ou leis). Os alunos utilizavam os esquemas mesmo quando não se solicitava que o fizessem, ao final do curso. Alguns chegavam mesmo a reclamar quando o problema exigia que se calculasse o valor da incôgnita - queriam apenas esquematizar o plano de resolução, pois entendiam que após isso, o procedimento era puramente mecânico.

Verificou-se que a estrutura geral da árvore correspondente a um problema está intimamente ligada à dificuldade que os alunos sentem ao resolvê-lo. Algumas árvores são quase lineares, como mostrado abaixo:





Outros esquemas se desdobram em dois ou mais troncos:



Esse segundo tipo é sentido pelos alunos como muito mais difícil. O motivo parece ser o seguinte: nos problemas lineares, há dados ou constantes conhecidos em cada entroncamento; isso reforça a tentativa do aluno e faz com que ele acredite estar no caminho correto. Nos problemas "ramificados" parece que algo está errado, pois surgem mais incógnitas auxiliares ao mesmo tempo.

O método das árvores' permitiu verificar algumas dificuldades surgidas comumente quando os alunos não conseguem resolver problemas. A análise de questões tiradas de livros - texto comuns mostrou a utilização de um grande número de raciocínios que não tinham sido ensinados no texto correspondente, como raciocínios de superposição, simetria ou conhecimentos matemáticos especiais, ou mesmo simplificação de equações. Se for o professor analisar os problemas propostos aos alunos por meio de diagramas em árvores, poderá verificar rapidamente se realmente todos os entroncamentos foram ensinados ou não e poderá avaliar a dificuldade do problema. Acreditamos por isso que não se trata simplesmente de um recurso para os alunos, mas também um importante instrumento para os próprios professores. Ao se corrigir também problemas resolvidos por alunos, a análise das falhas torna-se muito mais fácil procurando-se localizar o erro no esquema auxiliar de resolução - se não for um simples engano matemático ou algo semelhante. Se muitos alunos cometeram erros em um mesmo entroncamento, isso significa que a lei ou princípio utilizado nesse entroncamento não foi corretamente ensinado. Pode-se também localizar fa-

lhas do texto de ensino.

O sistema de esquemas auxiliares em árvores pode ser generalizado para qualquer categoria de problemas - não só problemas de tipo didático, mas qualquer dificuldade - pois sua estrutura é semelhante à dos diagramas PERT e diagramas de bloco (fluxogramas); a principal diferença consiste na ênfase dada aos resultados intermediários e às técnicas especiais de construção e uso.