

Escoamento de Fluidos Através de Meios Porosos Anisotrópicos

AFFONSO SILVA TELLES e GIULIO MASSARANI

COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro RJ*

Recebido em 1.º de Agosto de 1974

In the present work we show that Darcy's equation represents a simplified form of the equation of motion for the fluid flowing through a porous medium. The simplifications concern the elimination of the acceleration, the divergence of the extra stress terms, and the assumption of existence of a linear form in the velocity for the resistive force the fluid exerts upon the solid. We show that this hypothesis may not be valid for all anisotropic media. In some instances, measurements of directional resistivity suggest existence of the resistivity tensor, leaving entirely open the question of symmetry. In connection with this important question, we suggest an experimental scheme for the determination of the antisymmetric part of this tensor. We conclude that material symmetries is the only macroscopic concept that imposes restrictions on the form of the resistivity and extra stress tensors.

Mostramos neste trabalho que a equação de Darcy representa uma forma simplificada da equação do movimento do fluido escoando através de um meio poroso. As simplificações envolvem a eliminação dos termos de aceleração, da divergência da tensão extra e a suposição de existência de uma forma linear na velocidade para a força resistiva que o fluido exerce sobre o sólido. Mostramos que esta hipótese pode não ser válida para todos os meios anisotrópicos. Em alguns casos as medidas de resistividade direcional sugerem a existência do tensor resistividade deixando, no entanto, inteiramente em aberto a questão de sua simetria. Nesse sentido é sugerido um esquema para a determinação experimental da parte anti-simétrica do tensor. Concluímos, também, que a simetria do material é o único conceito macroscópico a impor restrições sobre a forma dos tensores resistividade e tensão extra.

1. Introdução

Meios porosos anisotrópicos ocorrem com frequência na natureza, resultando daí o grande interesse despertado pelo estudo do escoamento através desses meios, em conexão com problemas de hidráulica subterrânea e produção de petróleo.

*Endereço: caixa postal 1191, 20.000 – Rio de Janeiro, RJ

Usualmente, a análise de escoamentos nos meios anisotrópicos baseia-se numa forma simplificada da equação do movimento, representando uma generalização da equação de Darcy (ver, por exemplo, Scheidegger¹, 1960, p. 77):

$$-\text{grad } p + \rho \mathbf{g} = \underline{R} \mathbf{q}, \quad (1)$$

onde p e ρ são, respectivamente, a pressão e a densidade do fluido, \mathbf{g} a força de campo exterior, \underline{R} o tensor resistividade, e \mathbf{q} a velocidade superficial do fluido.

Neste trabalho apresentamos um estudo das condições a serem impostas sobre uma forma mais geral da equação do movimento necessárias para sua redução à equação (1). Notamos que essa equação apresenta o equilíbrio das seguintes forças: as forças superficiais apresentadas pelo termo $-\text{grad } p$; as forças de campo apresentadas pelo termo $\rho \mathbf{g}$; e as forças resistivas exercidas pelo fluido sobre o esqueleto sólido, representadas pelo termo $\underline{R} \mathbf{q}$ (Lei de Darcy).

Com essa interpretação, fica aparente que a equação de Darcy engloba suposições sobre o tipo de escoamento considerado (acelerações nulas ou desprezíveis), bem como hipóteses constitutivas muito especiais. Dentre essas, considera-se que a força resistiva seja uma função linear da velocidade superficial.

Mostraremos neste trabalho que, mesmo para escoamentos lentos, a hipótese de linearidade é forte demais para descrever o comportamento de certos meios sedimentares.

A interpretação dada acima para a equação de Darcy não é a única possível. Nas condições em que o tensor resistividade é não singular, podemos escrever a equação (1) do modo:

$$\mathbf{q} = -\underline{K}(\text{grad } p - \rho \mathbf{g}), \quad (2)$$

onde $\underline{K} \equiv \underline{R}^{-1}$ é o tensor permeabilidade. Sob essa forma, a equação de Darcy pode ser interpretada como uma expressão linear entre o fluxo de quantidade de movimento \mathbf{q} e a força que causa esse fluxo, o que a coloca no campo da termodinâmica dos processos irreversíveis. Essa interpretação é dada por Marle² (1965), que concluiu, com o auxílio do teorema de Onsager, que a permeabilidade e, portanto, também a resistividade, são tensores simétricos.

Outros autores, como Ferrandon³ (1948), Matheron⁴ (1966), Whittaker⁵ (1969), Lew e Fung⁶ (1970), concluíram também pela simetria do tensor resistividade, a partir de diferentes modelos simplificados. No entanto, mostraremos neste trabalho que a não simetria da resistividade é compatível com todas as leis da física macroscópica e que os dados experimentais de resistividade direcional nada dizem sobre a parte anti-simétrica desse tensor. De fato, a 2.^a lei da termodinâmica conduz a conclusão de que as resistividades direcionais são não negativas e que o tensor resistividade é positivo semi-definido, mas deixa inteiramente em aberto a questão da simetria.

Mostraremos, também, que apenas o grupo de simetria do material poroso conduz a restrições sobre a forma da resistividade. Assim, por exemplo, simetrias materiais do tipo dos sistemas cúbico, rômboico, e algumas classes dos sistemas tetragonal e hexagonal possuem a resistividade simétrica, enquanto que para o sistema triclinico a resistividade pode assumir uma forma qualquer. Em outros sistemas, dois dos tres componentes da parte anti-simétrica são necessariamente nulos.

2. Equações da Continuidade e do Movimento

As leis básicas de conservação, que formam o núcleo da teoria do transporte em misturas, foram estabelecidas por Truesdell¹⁷ (1957) e, mais tarde, generalizadas por Kelly⁸ (1964). Com base nessas equações e na expressão do crescimento da entropia na forma da desigualdade de Clausius-Duhem, Eringen e Ingram⁹ (1965), Green e Naghdi¹⁰⁻¹³ (1965, 1967, 1968, 1969) Green e Steel¹⁴ (1966), Ingram e Eringen¹¹ (1967), Bowen¹⁶ (1967), Atkins¹⁷ (1967), Mills¹⁸ (1967), Müller¹⁹ (1968), Bowen e Wiese²⁰ (1969) e Gurtin²¹ (1971) desenvolveram uma teoria de misturas capaz de descrever fenômenos desde a difusão molecular e as reações químicas, até o escoamento em meios porosos (Crochet e Naghdi²², 1966, e Müller²³, 1971).

Dentro da linha de idéias desses autores, as equações de conservação de massa (equação da continuidade) e da quantidade de movimento do fluido podem ser escritas do modo:

$$\frac{d}{dt} (\varepsilon \rho) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{q}) = 0, \quad (3)$$

$$\rho \left[\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{q}/\varepsilon) + \text{grad} (\mathbf{q}/\varepsilon) \mathbf{q} \right] = - \text{grad} p + \text{div} \underline{T} - m + \mathbf{p}g, \quad (4)^*$$

onde ε é a porosidade do meio, \underline{T} a tensão extra sobre o flúido e m a força exercida pelo flúido sobre o esqueleto sólido.

Equações análogas a estas foram obtidas por Whitaker^{24,5} (1966, 1969) Slattery^{25,26} (1967, 1969), Marle²⁷ (1967) e Brenner²⁸ (1970). Partindo da equação de Cauchy e através do cômputo de diferentes médias, esses autores procuraram estabelecer a equação (4). No entanto, apenas Marle faz um tratamento correto dos termos da aceleração e da tensão extra.

Para tornar claras as suposições necessárias para reduzir a equação do movimento à equação de Darcy, nos limitaremos ao estudo de hipóteses constitutivas muito simples. Suporemos que a força resistiva m e a tensão extra \underline{T} sejam determinadas pela configuração do meio poroso e pela velocidade superficial \mathbf{q} :

$$\begin{aligned} m &= f_{\chi}(\mathbf{q}), \\ \underline{T} &= G_{\chi}(\mathbf{q}), \end{aligned} \quad (5)$$

onde χ é a configuração do meio poroso, isto é, uma função, definida sobre o conjunto das partículas do meio no espaço euclidiano que, para cada partícula P , associa sua posição no espaço,

$$\mathbf{x} = \chi(P) \quad (6)$$

Dada uma configuração χ do meio e um homeomorfismo H sobre o espaço, podemos formar uma nova configuração $H \circ \chi$ definida por

$$H \circ \chi(P) \equiv H(\chi(P)). \quad (7)$$

Se, por exemplo, Q é um tensor e \mathbf{a} um ponto do espaço, então a configuração $Q \circ \chi$ é definida por

$$Q \circ \chi(P) \equiv Q[\chi(P) - \mathbf{a}] + \mathbf{a}. \quad (8)$$

Sendo Q um tensor ortogonal representando uma rotação, a nova configuração definida em (8) pode ser interpretada como uma rotação em torno do ponto \mathbf{a} .

*O primeiro membro desta equação advém da hipótese de que o momentum do flúido no meio poroso é dado por

$$\int \rho \mathbf{v} dV,$$

onde \mathbf{v} é a velocidade intersticial ($\mathbf{v} = \mathbf{q}/\varepsilon$).

As funções materiais que dão a força resistiva e a tensão extra não são completamente arbitrárias: devem verificar o princípio da invariância as mudanças do sistema de referência. Isto é, devem satisfazer ao princípio de objetividade material (Noll²⁹, 1958). Esse princípio pode ser expresso da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{Q \circ \chi}(\underline{Q} \mathbf{q}) &= \underline{Q} \mathbf{f}_\chi(\mathbf{q}), \\ \underline{G}_{Q \circ \chi}(\underline{Q} \mathbf{q}) &= \underline{Q} \underline{G}_\chi(\mathbf{q}) \underline{Q}^T, \end{aligned} \quad (9)$$

idênticamente para todo o tensor ortogonal \underline{Q} .

Convém acentuar neste momento a importância de evidenciar-se o papel das configurações nas funções materiais. Sem essas, o princípio da objetividade material não poderia ser enunciado com o grau de generalização das expressões (9); apenas uma forma particular e válida somente para materiais isotrópicos poderia ser apresentada.

Definamos, agora, o grupo de simetria do meio poroso como o conjunto das transformações unimodulares \underline{H} (isto é, tensores cujo módulo do determinante é unitário) que preservam a resposta do meio. Isto significa que:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\underline{H} \circ \chi}(\mathbf{q}) &= \mathbf{f}_\chi(\mathbf{q}) \\ \underline{G}_{\underline{H} \circ \chi}(\mathbf{q}) &= \underline{G}_\chi(\mathbf{q}) \end{aligned} \quad (10)$$

para todo tensor \underline{H} pertencente ao grupo de simetria. No que tange à força resistiva e a tensão extra, as duas configurações do meio poroso χ e $\underline{H} \circ \chi$ são indistinguíveis uma da outra.

Se um tensor ortogonal \underline{Q} pertence ao grupo de simetria, então, a conjugação da objetividade material com as equações (10) conduzem ao resultado:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_\chi(\underline{Q} \mathbf{q}) &= \underline{Q} \mathbf{f}_\chi(\mathbf{q}), \\ \underline{G}_\chi(\underline{Q} \mathbf{q}) &= \underline{Q} \underline{G}_\chi(\mathbf{q}) \underline{Q}^T. \end{aligned} \quad (11)$$

É necessário deixar bem claro que as equações (11) são válidas apenas para os tensores ortogonais que pertencem ao grupo de simetria do meio poroso. O não conhecimento desse fato conduz a resultados contraditórios.

Um meio poroso será chamado de isotrópico se o seu grupo de simetria contiver o grupo ortogonal. Para esses meios e apenas para esses, as equações (11) se verificam para qualquer transformação ortogonal. Se o grupo de simetria for menor do que o grupo ortogonal, então o meio poroso será chamado anisotrópico.

3. A Força Resistiva

Suponhamos que a função f_x seja Frechet-diferenciável na origem, isto é:

$$f_x(\mathbf{q}) = f_x(\mathbf{0}) + \underline{R}_x \mathbf{q} + \mathcal{O}(\mathbf{q}) \|\mathbf{q}\| \quad (12)$$

onde

$$\lim_{\|\mathbf{q}\| \rightarrow 0} \frac{\mathcal{O}(\mathbf{q})}{\|\mathbf{q}\|} = \mathbf{0}.$$

Nesse caso, podemos demonstrar, por um esquema análogo ao usado por Coleman e Noll³⁰ (1963), que $f_x(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$

Na equação (12), \underline{R}_x é uma transformação linear que denominaremos tensor resistividade. As equações (5)₁ e (12) conduzem a:

$$\mathbf{m} = \underline{R}_x \mathbf{q} + \mathcal{O}(\mathbf{q}) \|\mathbf{q}\|. \quad (13)$$

Resulta, então, que se f_x é diferenciável na origem, verificar-se-á a validade da lei de Darcy para escoamentos suficientemente lentos.

Façamos agora uma suposição mais fraca do que a da existência da diferencial de Frechet. Suponhamos que existam as resistividades direcionais para todos os vetores unitários \mathbf{n} , definidas por:

$$r_{x,\mathbf{n}} \equiv \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left[\mathbf{n} \cdot \frac{f_x(\alpha \mathbf{n})}{\alpha} \right]. \quad (14)$$

Notemos que estas representam o produto escalar de \mathbf{n} pelas derivadas de Gateaux de f_x na origem, segundo a direção \mathbf{n} .

Considerando o escoamento permanente e uniforme na direção \mathbf{n} ($\mathbf{q} = \|\mathbf{q}\| \mathbf{n}$) através de um meio de porosidade constante, resulta das equações (4), (5) e (14) que:

$$r_{x,\mathbf{n}} = \lim_{\|\mathbf{q}\| \rightarrow 0} \frac{-\phi_{\mathbf{n}}}{\|\mathbf{q}\|}, \quad (15)$$

onde

$$\phi_{\mathbf{n}} = [\text{grad } p - \rho \mathbf{g}] \cdot \mathbf{n}.$$

A equação (15) é a definição de resistividade direcional de emprego mais difundido na literatura. Outra definição (Scheidegger¹, 1968, p. 78) pode ser representada por

$$s_{x,n} = \lim_{\|\mathbf{q}\| \rightarrow 0} \frac{-\|\mathbf{h}\|}{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}},$$

onde

$$\mathbf{h} = \|\text{grad } p - \rho \mathbf{g}\| \mathbf{n}.$$

É fácil verificar que essas duas definições devem conduzir, para meios anisotrópicos, a valores diferentes de resistividade direcional:

$$s_{x,n} \geq r_{x,n}.$$

A equação (15) mostra que $r_{x,n}$ pode ser determinado experimentalmente através de medidas de velocidade superficial e queda de pressão no escoamento uniforme através de amostras retiradas do meio. De fato, este esquema experimental é usado por diversos autores, como, Johnson et al.^{31,32} (1948, 1951).

Das equações (11)₁ e (14) podemos demonstrar que

$$r_{x,qn} = r_{x,n}, \quad (16)$$

isto é, as resistividades direcionais têm valores idênticos para direções que podem ser levadas uma sobre a outra por um tensor ortogonal pertencente ao grupo de simetria. Em particular, para os meios cujo grupo de simetria contenha a inversão -1 , temos:

$$r_{x,-n} = r_{x,n}. \quad (17)$$

Esses meios possuem resistividades iguais para direções opostas. Scheidegger (1954) conjectura que esse fato seja verdadeiro para todos os meios, muito embora varios daqueles estudados por Johnson et al.^{31,32} (1948, 1951) mostrem o contrário. Scheidegger³³ (1954) atribui essa "discrepância" a inomogeneidades do meio e a erros experimentais, os quais procura contornar através do cômputo de médias.

Imaginemos um meio poroso composto de pequenos cones orientados no mesmo sentido. É bem possível que nesse caso o meio apresente diferentes resistividades em direções opostas. O mesmo pode acontecer com meios naturais sedimentares, já que as partículas tendem a se depositar orientadas no sentido que oferece maior resistência. Parece, portanto, temerário o procedimento de Scheidegger³³(1954) na análise dos dados de Johnson e co-autores.

Se, porém, o tensor resistividade existir, então resultará das equações (13) e (14) que:

$$r_{\chi,n} = n \cdot \underline{R}_{\chi} n \quad (18)$$

e a equação (17) é verificada.

A relação (17) é condição necessária para a existência do tensor resistividade. Por conseqüência, se os dados de Johnson e *co-autores* nem todos satisfazem a esse resultado, eles simplesmente indicam a não existência do tensor resistividade para certos meios naturais.

Retornemos ao caso em que a resistividade existe. Fazendo a decomposição de \underline{R} , em suas partes simétrica $\underline{\mathcal{S}}$ e anti-simétrica $\underline{\mathcal{A}}$, e lembrando a identidade válida para todo o tensor anti-simétrico

$$n \cdot \underline{\mathcal{A}}_{\chi} n = 0, \quad (19)$$

então, a equação (18) pode ser escrita sob a forma:

$$r_{\chi,n} = n \cdot \underline{\mathcal{S}}_{\chi} n = \lambda_1 \cos^2 \alpha_1 + \lambda_2 \cos^2 \alpha_2 + \lambda_3 \cos^2 \alpha_3 \quad (20)$$

onde λ_i são os autovalores de $\underline{\mathcal{S}}_{\chi}$ e α_i os ângulos que n forma com as direções principais de $\underline{\mathcal{S}}_{\chi}$. Assim, o lugar geométrico dos pontos $1/(r_{\chi,n})^{1/2}$ assinalados a partir de um ponto segundo as direções n é um elipsóide. Alguns dos dados de Johnson e *co-autores*^{31,32} (1948, 1951) parecem verificar o elipsóide e, portanto, a existência da resistividade.

Costuma-se associar a não verificação do elipsóide a não simetria de \underline{R} . Tal interpretação é obviamente falsa, pois as equações (19) e (20) mostram que a parte anti-simétrica de \underline{R} , fica eliminada do esquema experimental. A não verificação do elipsóide sugere, isto sim, a não existência da resistividade.

Em resumo, podemos afirmar que pelo menos parte dos dados experimentais apresentados na literatura sugerem a existência do tensor resistividade, mas deixam inteiramente em aberto a questão da simetria.

Essa questão vem preocupando um grande número de autores. Na hidráulica subterrânea, a resistividade é tácitamente considerada um tensor simétrico (Polubarinova-Kochina³⁴, 1962, p. 345).

Diferentes análises parecem conduzir a simetria: através de um modelo capilar (Ferrandon³, 1948); através de um modelo espacialmente

periódico (Whitaker⁵, 1969); através de um modelo estatístico (Matheron⁴, 1966; Lew e Fung⁶, 1970); através de termodinâmica dos processos irreversíveis (Marle², 1965); através de uma analogia a teoria simplificada de Ericksen³⁵ (1960) para cristais líquidos*.

Um possível esquema experimental para a determinação completa de R , é o seguinte: Seja e_i , $i = 1, 2, 3$, uma base ortogonal coincidente com os autovetores de \underline{S}_x , obtida do elipsóide anteriormente mencionado. Façamos um escoamento suficientemente lento e uniforme na direção e_i , e seja e_j uma direção normal a e_i . Resulta das equações (4), (5) e (13) que:

$$-\phi_j = -e_j \cdot (\text{grad } p - \rho \mathbf{g}) = R_{ji} \|\mathbf{q}\| = A_{ji} \|\mathbf{q}\|. \quad (21)$$

Assim, se for constatada uma diferença de pressão ϕ_j na direção normal ao escoamento, devemos concluir que a resistividade é assimétrica e sua representação matricial na base escolhida será:

$$R_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \quad (22)$$

Tal como na resistividade direcional, o grupo de simetria do meio poroso impõe restrições sobre a forma do tensor resistividade. Com o auxílio das equações (11)₁ e (13) podemos concluir que se um tensor ortogonal pertence ao grupo de simetria do material, então ele comuta com a resistividade:

$$\underline{R}_x \underline{Q} = \underline{Q} \underline{R}_x, \quad \underline{S}_x \underline{Q} = \underline{Q} \underline{S}_x, \quad \underline{A}_x \underline{Q} = \underline{Q} \underline{A}_x. \quad (23)$$

O problema da determinação dessas restrições é perfeitamente análogo ao abordado por Wang³⁶ (1969) em relação ao tensor condutividade térmica. Seus resultados para os grupos cristalográficos clássicos são apresentados na Tabela (1).

*Whitaker⁵ supõe basicamente que a resistividade é uma função isotrópica de um único vetor w denominado diretor: $R_x = R(w)$. A conclusão de simetria é portanto, óbvia, já que a única função isotrópica de um único vetor, com valores tensoriais anti-simétricos é a função idênticamente nula. Porém, se supusermos dois (ou mais) vetores diretores. $R_x = R(w_1, w_2)$, a parte anti-simétrica da resistividade será dada por:

$$A_x = \alpha [w_1 \otimes w_2 - w_2 \otimes w_1]$$

com

$$\alpha = \alpha (\|w_1\| \cdot \|w_2\|, w_1 \cdot w_2)$$

SISTEMA	TENSOR RESISTIVIDADE
TRICLÍNICO	R_x e qualquer
MONOCLÍNICO TETRAGONAL (3 CLASSES) HEXAGONAL (5 CLASSES)	$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
CÚBICO ROMBICO TETRAGONAL (4 CLASSES) HEXAGONAL (7 CLASSES)	R_x é simétrico

Tabela 1. Forma do tensor resistividade para os grupos clássicos de simetria.

Para os meios transversalmente isotrópicos, isto é, aqueles cujo grupo de simetria contém todas as rotações em torno do eixo e_3 , a resistividade é da forma:

$$R_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a & 0 \\ -a & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad (24)$$

e, para os meios isotrópicos

$$R_x = R_x \underline{1}. \quad (25)$$

Nas condições que estamos analisando, é possível demonstrar que a segunda lei da termodinâmica assume a forma $m \cdot q \geq 0$ (ver, por exemplo, Gurtin,²¹ 1971). Podemos concluir que as resistividades direcionais são não negativas e que o tensor resistividade é positivo semi-definido. As equações (13) e (19) deixam, então, claro que a segunda lei é compatível com a assimetria do tensor resistividade.

Assim, podemos concluir que apenas o grupo de simetria é capaz de nos dizer algo sobre a parte anti-simétrica da resistividade.

4. A Tensão Extra

A grande maioria dos estudos sobre as equações constitutivas para o escoamento de fluídos através de meios porosos se referem a escoamentos uniformes. Neste caso, resulta da hipótese (5)₂ que

$$\operatorname{div} \mathcal{T} = 0, \quad (26)$$

significando que a tensão extra não afeta o escoamento, mas influencia as condições de contorno e de salto nas superfícies singulares. Por essa razão pouco se sabe sobre ela.

A tensão extra \underline{T} , presente na equação (4), não é necessariamente simétrica, mas sua parte anti-simétrica é equilibrada pela tensão na fase sólida, de tal forma que a tensão total é simétrica. É difícil compreender porque Brenner²⁸(1970) pretende associar este fato bem conhecido na teoria de misturas a partículas espiraliformes (screw-like particles). Uma análise mais apropriada pode ser feita em função do grupo de simetria do material.

A função \underline{G}_x pode ser decomposta em uma função simétrica e outra anti-simétrica:

$$\underline{G}_x(\mathbf{q}) = \underline{G}_x^S(\mathbf{q}) + \underline{G}_x^A(\mathbf{q}). \quad (27)$$

É possível demonstrar que a equação (11)₂ é equivalente a:

$$\underline{G}_x^S(\underline{Q}\mathbf{q}) = \underline{Q}\underline{G}_x^S(\mathbf{q})\underline{Q}^T, \quad \underline{G}_x^A(\underline{Q}\mathbf{q}) = \underline{Q}\underline{G}_x^A(\mathbf{q})\underline{Q}^T, \quad (28)$$

as quais devem ser satisfeitas para todos os tensores ortogonais que pertencem ao grupo de simetria.

No caso especial em que o meio poroso é isotrópico, teremos por um conhecido teorema de representação que

$$\begin{aligned} \underline{T} &= \underline{G}_x^S(\mathbf{q}) = \alpha_1(\|\mathbf{q}\|) \underline{1} + \alpha_2(\|\mathbf{q}\|) \mathbf{q} \otimes \mathbf{q}, \\ \underline{G}_x^A(\mathbf{q}) &= \underline{0}. \end{aligned} \quad (29)$$

Neste caso, a tensão extra é um tensor simétrico cujos autovetores são $\mathbf{e}_1 = \mathbf{q}/\|\mathbf{q}\|$ e qualquer vetor perpendicular a \mathbf{q} no ponto considerado. Além disso, as tensões principais são dadas por:

$$\begin{aligned} T_1 &= \alpha_1 + \alpha_2(\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}), \\ T_2 &= T_3 = \alpha_1. \end{aligned} \quad (30)$$

A simetria do tensor tensão que acabamos de demonstrar depende da hipótese (5)₂ e de se admitir a isotropia do meio. Deixemos claro que se a tensão depender de outros parâmetros cinemáticos, como por exemplo do gradiente da velocidade, então não será necessariamente simétrica. O mesmo pode-se afirmar em relação aos meios anisotrópicos. Para demonstrar esse fato, basta considerar a seguinte função:

$$\underline{G}_x^A(\mathbf{q}) = \beta(\|\mathbf{q}\|) [\mathbf{q} \otimes \underline{R}_x \mathbf{q} - \underline{R}_x \mathbf{q} \otimes \mathbf{q}]. \quad (31)$$

Esta satisfaz o princípio da objetividade material e todas as restrições impostas pelo grupo de simetria. Além disso, \underline{G}_x^A reduz-se a $\underline{0}$ se o material for isotrópico.

Vemos, então, que a possibilidade da existência de uma parte anti-simétrica da tensão extra depende da natureza da hipótese constitutiva e do grupo de simetria do material. Essas conclusões podem ser obtidas por considerações puramente macroscópicas e sem apelo a considerações sobre a forma das partículas.

5. Equação de Darcy. Conclusões

Fizemos, nos ítems (2) e (3), uma distinção entre lei de Darcy e equação de Darcy. A primeira é uma hipótese constitutiva linear de dependência da velocidade superficial na força resistiva,

$$\underline{m} = \underline{R}_x \underline{q}$$

e a segunda é a equação de campo obtida da equação do movimento quando eliminamos alguns de seus termos e consideramos como válida a lei de Darcy:

$$-(\text{grad } p - \rho \underline{g}) = \underline{R}_x \underline{q}.$$

Os termos eliminados se referem a aceleração e a tensão extra do fluido:

$$\rho \left[\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (\underline{q}/\varepsilon) + \text{grad} (\underline{q}/\varepsilon) \underline{q} \right] = \underline{0}$$

$$\text{div } \underline{T} = \underline{0}.$$

Dentro da hipótese constitutiva (5)₁, a lei de Darcy representa a força resistiva \underline{m} para o caso do escoamento suficientemente lento, sempre que esta for Frechet-diferenciável na origem.

Quanto as simplificações acima mencionadas, estas são exatas quando o escoamento for permanente e uniforme. Em outros casos, tanto a aceleração quanto a divergência da tensão podem ser importantes. Em relação a essa última, mencionamos o fato de que uma quantidade limitada de dados experimentais obtidos por Fernandes³⁷ (1972) parecem confirmar a equação (29)₁, principalmente para o escoamento de fluidos não-newtonianos.

Mostramos no item (3) que os dados relativos ao escoamento de fluídos através de meios anisotrópicos se referem a medidas de resistividade direcional, cuja existência não implica na existência do tensor permeabilidade. Embora alguns dados experimentais pareçam confirmar a existência do tensor, outros parecem indicar o contrário. A conclusão a que se chega é, portanto, a de que nem todos os meios têm a si associados um tensor resistividade.

Ainda no ítem (3), apresentamos um esquema que permite verificar a natureza do tensor resistividade. Este é classicamente considerado como sendo simétrico, sem que seja conhecida uma verificação experimental do fato. Na realidade, é apenas o grupo de simetria do material poroso que impõe restrições na forma da resistividade.

Referências

1. A. E. Scheidegger, *The Physics of Flow Through Porous Media*, University of Toronto Press, Second Edition (1960)
2. C. Marle, *Application des Méthodes de la Thermodynamique des Processus Irreversibles a l'Écoulement d'un Fluide a Travers un Milieu Poreux*, Bulletin Rilem 29, 107 (1965).
3. J. Ferrandon, *Genie Civil* 125, 24 (1948).
4. G. Matheron, *Rev. Inst. Français du Pétrole*, 21, 1697 (1966).
5. S. Whitaker, *Advances in Theory of Fluid Motion in Porous Media*, I/EC, 61, 14 (1969).
6. H. S. Lew and Y. C. Fung, *Int. J. Solids Structures* 6, 1323 (1970).
7. C. Truesdell, *Rend. Accad. Lincei*, 22, 33 e 158 (1957).
8. P. D. Kelly, *Int. J. Engng. Sci.*, 2, 129 (1964).
9. A. C. Eringen and J. D. Ingram, *Int. J. Engng. Sci.*, 3, 197 (1965).
10. A. E. Green and P. M. Naghdi, *Int. J. Engng. Sci.*, 3, 231 (1965).
11. A. E. Green and P. M. Naghdi, *Arch. Rational Mech. Anal.* 24, 243 (1967).
12. A. E. Green and P. M. Naghdi, *Int. J. Engng. Sci.*, 6, 631 (1968).
13. A. E. Green and P. M. Naghdi, *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 22, 427 (1969)
14. A. E. Green and P. R. Steel, *Int. J. Engng. Sci.*, 4, 483 (1966).
15. J. D. Ingram and A. C. Eringen, *Int. J. Engng. Sci.*, 5, 289 (1967).
16. R. M. Bowen, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 24, 370 (1967).
17. R. J. Atkins, *ZAMP*, 18, 803 (1967).
18. M. Mills, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 20, 499 (1967).
19. I. Müller, *Arch. Rational Mech. Anal.* 28, 1 (1968).
20. R. M. Bowen and J. C. Wiese, *Int. J. Engng. Sci.*, 7, 689 (1969).
21. M. E. Gurtin, *Arch. Rational Mech. Anal.* 43, 198 (1971).
22. M. J. Crochet and P. M. Naghdi, *Int. J. Engng. Sci.*, 4, 383 (1966).
23. I. Müller, *Equation for the Flow of a Fluid Through a Porous Solid*, CISM meeting at Udine, Italy (1971).
24. S. Whitaker, *Chem. Engng. Sci.*, 21, 291 (1966).
25. J. C. Slattery, *A. I. Ch. E. J.*, 13, 1066 (1967).
26. J. C. Slattery, *A. I. Ch. E. J.*, 15, 866 (1969).
27. C. Marle, *Rev. Inst. Français du Pétrole*, 22, 1471 (1967).